Topologia

Tehtävät 1:1-1:8

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 1:1: Olkoon X joukko ja $(\mathcal{T}_j)_{j \in J}$ perhe X:n topologioita. Osoita, että $\mathcal{T} = \bigcap\{\mathcal{T}_j : j \in J\}$ on myös X:n topologia.

Ratkaisu:

(T1) Olkoon $U_i \in \mathcal{T}, i \in I$. Tällöin $U_i \in \mathcal{T}_j, \forall i \in I$ ja $\forall j \in J$. Siis $\bigcup\{U_i \ : \ i \in I\} \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J$, joten $\bigcup\{U_i \ : \ i \in I\} \in \bigcap\{\mathcal{T}_j \ : \ j \in J\} = \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Tällöin $U, V \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J$, joten $U \cap V \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J$. Siis $U \cap V \in \bigcap\{\mathcal{T}_j \ : \ j \in J\} = \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}_j, \forall j \in J$, joten $\emptyset \in \bigcap\{\mathcal{T}_j \ : \ j \in J\} = \mathcal{T}$. Samoin $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X:n eräs topologia. $\square$

Tehtävä 1:2: Olkoon X joukko ja $(\mathcal{T}_j)_{j\in J}$ perhe X:n topologioita. Osoita, että $\mathcal{T} = \bigcup\{\mathcal{T}_j : j \in J\}$ ei aina ole X:n topologia.

Ratkaisu:

Olkoon $X = \{1, 2, 3\}$. Olkoon $\mathcal{T}_1 = \{\{1\}, \emptyset, X\}$ ja $\mathcal{T}_2 = \{\{2\}, \emptyset, X\}$. Selvästi $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat topologioita. Tällöin $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset, X\}$, mutta $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{T}$, joten (T1) ei toteudu.

$\therefore$ $\mathcal{T}$ ei ole X:n topologia. $\square$

Tehtävä 1:3: Joukon X kofiniitti topologia sisältää $\emptyset$:n lisäksi ne joukot $U \subset X$, joiden komplementti $\complement U$ on äärellinen. Osoita että tämä todella on X:n topologia ja että X on Hausdorff, jos ja vain jos X on äärellinen.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{U \subset X \ : \ \#\complement U < \infty\} \cup \{\emptyset\}$

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}, \forall j \in J$. Tällöin $\#\complement U_j < \infty, \forall j \in J$, joten De Morganin nojalla $\complement \bigcup\{U_j \ : \ j \in J\} = \bigcap\{\complement U_j \ : \ j \in J\} \subset \complement U_1 \Rightarrow \#\complement \bigcup\{U_j \ : \ j \in J\}) \leq \complement U_1 < \infty \Rightarrow \bigcup\{U_j \ : \ j \in J\} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Tällöin $\#\complement U, \#\complement V < \infty$ eli De Morganin nojalla $U \cap V = \complement(\complement U \cup \complement V)$. Siis $\complement(U \cap V) = \complement U \cup \complement V$, joten $\#\complement(U \cap V) \leq \#\complement U + \#\complement V < \infty$. Siis $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $\#\complement X = \#\emptyset = 0 < \infty$, joten $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X:n topologia.

Olkoon X äärellinen ja $x, y \in X, x \neq y$. Nyt $\#\complement\{x\} = \#X \setminus \{x\}$ eli $\{x\} \in \mathcal{T}$. Samoin $\{y\} \in \mathcal{T}$. Koska $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ja $\{x\}$ on x:n ympäristö ja $\{y\}$ on y:n ympäristö, X on Hausdorff.

Olkoon X Hausdorff ja $x, y \in X, x \neq y$. Olkoon $x \in U \in \mathcal{T}$ ja U x:n ympäristö. Olkoon $y \in V \in \mathcal{T}$ ja V y:n ympäristö. Koska X on Hausdorff niin voidaan valita ympäristöt U ja V s.e. $U \cap V = \emptyset$. Siis (T2):n nojalla $U \cap V \in \mathcal{T}$ eli $\#\complement(U \cap V) = \#\complement\emptyset = \#X < \infty$. Siis X on äärellinen.

$\therefore X$ on Hausdorff, jos ja vain jos X on äärellinen. $\square$

Tehtävä 1:4: Todista, että kun $\mathcal{T}$ on kokoelma, johon kuuluvat $\emptyset, \mathbb{R}$ ja kaikki muotoa $]a, \infty[$ olevat välit, $a \in \mathbb{R}$, niin se on $\mathbb{R}$:n topologia.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{]a, \infty[: \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(T1) Olkoon $a_j \in \mathbb{R}, j \in J$. Nyt $\bigcup\{]a_j, \infty[: \ j \in J\} =]\inf_{j\in J}\{a_j\}, \infty[\in \mathcal{T}$, jos $\inf_{j\in J}\{a_j\} > -\infty$. Jos $\inf_{j\in J}\{a_j\} = -\infty$, niin
$\bigcup\{]a, \infty[: \ j \in J\} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Nyt $]a, \infty[\cap]b, \infty[=]\max\{a, b\}, \infty[\in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia. $\square$

Tehtävä 1:5: Määritä yksiön $\{0\}$ sulkeuma topologiassa $\mathcal{T} = \{]a, \infty[\ : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

Tehtävä 1:6: Olkoon X topologinen avaruus. Todista, että:
(1) Suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu.
(2) Suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu.
(3) $\emptyset$ ja X ovat suljettuja.

Ratkaisu:

Olkoon X topologinen avaruus.

(1) Olkoon $U_j \subset X$ suljettu $\forall j \in J$. Nyt De Morganin ja (T1):n nojalla $\complement(\bigcap\{U_j \ : \ j \in J\}) = \bigcup\{\complement U_j \ : \ j \in J\} \subset X$ ja avoin, koska $\complement U_j \subset X$ ovat avoimia $\forall j \in J$. Siis $\bigcap\{U_j \ : \ j \in J\} \subset X$ on suljettu.

(2) Olkoon $U_j \subset X$ suljettu $\forall j \in J$, missä $\#J < \infty$. Silloin De Morganin ja (T2):n nojalla $\complement(\bigcup\{U_j \ : \ j \in J\}) = \bigcap\{\complement U_j \ : \ j \in J\} \subset X$ on avoin, koska $\complement U_j \subset X$ ovat avoimia $\forall j \in J$. Siis $\bigcup\{U_j \ : \ j \in J\} \subset X$ on suljettu.

(3) $\complement\emptyset = X$ ja $\complement X = \emptyset$, joten $\emptyset$ ja X ovat suljettuja. $\square$

Tehtävä 1:7: Olkoon $\mathcal{T}$ niiden joukkojen $U \subset \mathbb{R}$ kokoelma, joilla $U = \emptyset$ tai $\mathbb{R} \setminus U$ on numeroituva. Osoita, että $\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia. Onko avaruus Hausdorff?

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \ : \ U = \emptyset \text{ tai } \mathbb{R} \setminus U \text{ on numeroituva}\}$.

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}, \forall j \in J$. Silloin $\mathbb{R} \setminus U_j$ on numeroituva $\forall j \in J$. De Morganin nojalla saadaan
$\complement(\bigcup\{U_j \ : \ j \in J\}) = \bigcap\{\mathbb{R} \setminus U_j \ : \ j \in J\} \subset \mathbb{R} \setminus U_1$, joka on numeroituva.
Siis $\mathbb{R} \setminus \bigcup\{U_j \ : \ j \in J\}$ on numeroituva, joten $\bigcup\{U_j \ : \ j \in J\} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$ ja $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ numeroituvia. Tällöin De Morganin nojalla $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$ ja tämä on numeroituva, koska $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ olivat numeroituvia.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $\#\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \#\emptyset = 0 < \infty$, joten $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

$\therefore$ $\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia.

Olkoon $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$. Olkoon $x \in U \in \mathcal{T}$ ja U x:n ympäristö. Samoin olkoon $y \in V \in \mathcal{T}$ ja V y:n ympäristö. Nyt jos
$U \cap V = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V) = \emptyset \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R} \Rightarrow$
$\mathbb{R} \setminus U$ tai $\mathbb{R} \setminus V$ on ylinumeroituva. Tämä on ristiriita, sillä $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ olivat numeroituvia. Siis $U \cap V \neq \emptyset$.

$\therefore$ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ei ole Hausdorff. $\square$

Tehtävä 1:8: Olkoon X ääretön avaruus, jonka kaikki äärettömät osajoukot ja $\emptyset$ ovat avoimia. Osoita, että X on diskreetti.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{A \subset X \ : \ \#A = \infty\} \cup \{\emptyset\}$.

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}, j \in J$. Selvästi $\# \bigcup \{U_j \ : \ j \in J\} = \infty$, joten $\bigcup \{U_j \ : \ j \in J\} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset \neq V$ ja $U \neq X \neq V$. Osoita, että $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja koska X on ääretön niin $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X:n topologia.

Olkoon $A \in \mathcal{T}$. Silloin selvästi $A \in \mathcal{P}(X)$, joten siis $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Oletetaan nyt että $A \in \mathcal{P}(X)$ ja oletetaan, että $A \neq \emptyset$. Voidaan kirjoittaa $A = \bigcup \{\{x\} \ : \ x \in A\}$. Valitaan jono $(x_i) = (x_1, x_2, \ldots)$, missä $x_i \neq x_j, \forall i, j \in \mathbb{N}$ ja $x_i \in X, \forall i \in \mathbb{N}$. Valitaan $U = \{x_1\} \cup \{\{x_i\} \ : \ i = 2n \text{ kun } n \in \mathbb{N}\}$ ja $V = \{x_1\} \cup \{\{x_i\} \ : \ i = 2n + 1 \text{ kun } n \in \mathbb{N}\}$. Tällöin $U, V \in \mathcal{T}$, joten $U \cap V = \{x_1\} \in \mathcal{T}$. Koska x_1 voidaan valita mielivaltaisesti, on yksiö avoin X:ssä eli $A \in \mathcal{T}$. Siis $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ eli X on diskreetti.