Topologia

Tehtävät 1:9-1:15

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 1:9: Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Todista:
(a) $\partial\partial A \subset \partial A$.
(b) Jos A on suljettu, niin $\partial\partial A = \partial A$.
(c) Aina $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.
Osoita esimerkillä $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, että a-kohdassa ei aina päde yhtälö.

Tehtävä 1:10: Olkoot A ja B avaruuden X erillisiä avoimia osajoukkoja. Osoita, että joukot $\mathrm{int}\bar{A}$ ja $\mathrm{int}\bar{B}$ ovat erillisiä.

Ratkaisu:

$A, B \subset X$ ovat avoimia ja $A \cap B = \emptyset \Rightarrow B \subset \complement A \subset X$ ja $\complement A$ on suljettu. Lauseen 1.12(3) nojalla siis saadaan $\bar{B} \subset \complement A$ ja vastaavasti $\bar{A} \subset \complement B$.

Nyt lauseen 1.14(4) ja lauseen 1.12(8) nojalla $\mathrm{int}\bar{A} \cap \mathrm{int}\bar{B} = \complement\overline{\complement\overline{A}} \cap \complement\overline{\complement\overline{B}} = \complement(\overline{\complement\overline{A}} \cup \overline{\complement\overline{B}}) = \complement\overline{(\complement\overline{A} \cup \complement\overline{B})} = \complement\overline{\complement(\overline{A} \cap \overline{B})} = \mathrm{int}(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Siis
$\mathrm{int}\bar{A} \cap \mathrm{int}\bar{B} = \mathrm{int}(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset \mathrm{int}(\complement A \cap \complement B) = \mathrm{int}\complement(A \cup B) = \complement\overline{(A \cup B)} = \complement\bar{A} \cap \complement\bar{B}$.

Toisaalta $\mathrm{int}\bar{A} \cap \mathrm{int}\bar{B} = \mathrm{int}(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, joten
$\mathrm{int}\bar{A} \cap \mathrm{int}\bar{B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \cap \complement\bar{A} \cap \complement\bar{B} = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. $\square$

Tehtävä 1:11: Olkoot A ja B avaruuden X suljettuja osajoukkoja, joilla ei ole sisäpisteitä. Osoita, että joukolla $A \cup B$ ei ole sisäpisteitä (tämä on vaatimaton äärellinen versio Bairen lauseesta 10.9).

Tehtävä 1:12: Olkoot d ja e joukon X metriikkoja, ja olkoon $d(x, y) \leq e(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Osoita, että $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.

Ratkaisu:

$\mathcal{T}_d = \{U \subset X \ : \ \forall x \in U \ \exists r > 0$ s.e. $B_d(x, r) \subset U\}$, missä $B_d(x, r) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}$.

Heti nähdään, että $d(x, y) \leq e(x, y) \ \forall x, y \in X \Rightarrow B_e(x, r) \subset B_d(x, r) \ \forall x \in X$ ja $r > 0 \Rightarrow \mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$. $\square$

Tehtävä 1:13: Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
(1) A on tiheä X:ssä.
(2) A kohtaa X:n jokaisen avoimen epätyhjän osajoukon.
(3) $\mathrm{int}\complement A = \emptyset$

Ratkaisu:

Osoitetaan ensiksi, että (1) $\Leftrightarrow$ (3): $\mathrm{int}\complement A = \complement\overline{\complement\complement A} = \complement\bar{A} = \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$.

Osoitetaan, että (1) $\Rightarrow$ (2): Olkoon $B \subset X$ avoin ja $B \neq \emptyset$. Vastaoletus: $A \cap B = \emptyset$.

Siis lauseen 1.12(3) ja (1):n nojalla saadaan
$A \subset \complement B \Rightarrow \bar{A} = X \subset \complement B \Rightarrow \complement B = X \Leftrightarrow B = \emptyset$, mikä on ristiriita.

$\therefore A \cap B \neq \emptyset$.

Osoitetaan, että (2) $\Rightarrow$ (1): Oletetaan, että $\complement\bar{A} \neq \emptyset$. Koska $\complement\bar{A} \subset X$ on avoin niin (2):n nojalla:

$\emptyset \neq \complement\bar{A} \cap A \subset \complement\bar{A} \cap \bar{A} = \emptyset$, mikä on ristiriita.

$\therefore \complement\bar{A} = \emptyset \Leftrightarrow \bar{A} = X$. $\square$

Tehtävä 1:14: Olkoon X joukko, jonka jokaista osajoukkoa $A \subset X$ kohti on annettu sellainen joukko $\bar{A} \subset X$, että kohdassa 1.16 mainitut Kuratowskin ehdot (K1)-(K4) ovat voimassa. Olkoon $\mathcal{T}$ niiden joukkojen $V \subset X$ kokoelma, joilla $\overline{\complement V} = \complement V$. Todista:
(a) $\mathcal{T}$ on X:n topologia.
(b) Joukko $\bar{A}$ on A:n sulkeuma topologiassa $\mathcal{T}$ kaikilla $A \subset X$.

Tehtävä 1:15: Olkoon $A_1, A_2, \ldots$ jono avaruuden X osajoukkoja. Jonon (topologinen) lim sup on niiden pisteiden $x \in X$ joukko, joiden jokainen ympäristö kohtaa A_j:n äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Jonon lim inf on niiden pisteiden $x \in X$ joukko, joiden jokainen ympäristö kohtaa A_j:t lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä j, ts. jostakin indeksistä $j = j_0$ alkaen.
(a) Osoita, että nämä joukot ovat suljettuja.
(b) Osoita, että ne eivät muutu, jos joukot A_j korvataan sulkeumillaan.
(c) Anna esimerkki tapauksesta, jossa

$$\liminf_{j \to \infty} A_j = \emptyset \neq \limsup_{j \to \infty} A_j.$$

Ratkaisu:

$A_1, A_2, \ldots \subset X.$

$$A_s = \limsup_{j \to \infty} A_j = \{x \in X \ : \ \forall U \subset X \text{ s.e. } U \text{ on avoin ja } x \in U \text{ pätee } U \cap A_j \neq \emptyset \ \forall j \in J, \quad \text{kun } J \subset \mathbb{N}, \#J = \infty\}$$

$$A_i = \liminf_{j \to \infty} A_j = \{x \in X \ : \ \forall U \subset X \text{ s.e. } U \text{ on avoin ja } x \in U \text{ pätee } U \cap A_j \neq \emptyset \ \forall j \geq j_0, \quad j_0 \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Osoitetaan, että $\complement A_s, \complement A_i \subset X$ ovat avoimia. Nyt:

$$\complement A_s = \{x \in X \ : \ \exists U \subset X \text{ s.e. } U \text{ on avoin ja } x \in U \text{ pätee } U \cap A_{j_x} = \emptyset \text{ jollakin } j_x \in J, \quad \text{kun } J \subset \mathbb{N}, \#J = \infty\}$$

$$\complement A_i = \{x \in X \ : \ \exists U \subset X \text{ s.e. } U \text{ on avoin ja } x \in U \text{ pätee } U \cap A_j = \emptyset \ \forall j \geq j_0, \quad j_0 \in \mathbb{N}\}.$$

$\forall x \in \complement A_s$ valitaan $U(x) \subset X$, joka on avoin, s.e. $x \in U(x)$ ja $U(x) \cap A_{j_x} = \emptyset$, jollakin $j_x \in J \subset \mathbb{N}$. (*)

Olkoon $x_0 \in \complement A_s$. Osoitetaan, että $U(x_0) \subset \complement A_s$, jolloin lauseen 1.5 nojalla $\complement A_s \subset X$ on avoin eli A_s on suljettu.

Olkoon siis $y \in U(x_0)$. Koska $x_0 \in \complement A_s$ niin $\exists j_{x_0} \in J \subset \mathbb{N}$ s.e. $U(x_0) \cap A_{j_{x_0}} = \emptyset$. Valitaan $j_y = j_{x_0}$ ja $U(y) = U(x_0)$, jolloin siis $\exists U(y) \subset X$, joka on avoin, s.e. $y \in U(y)$ pätee $U(y) \cap A_{j_y} = \emptyset$ jollakin $j_y \in J$ eli siis $y \in \complement A_s$.

Kuten edellä käytetään lausetta 1.5 ja osoitetaan, että $\complement A_i \subset X$ on avoin.

(*) uudestaan, sillä erolla että $\forall j_x \geq j_0$.

Olkoon taas $x_0 \in \complement A_i$ ja $y \in U(x_0)$. Valitaan taas $j_y = j_{x_0}$ ja $U(y) = U(x_0)$, jolloin siis $\exists U(y) \subset X$, joka on avoin, s.e. $y \in U(y)$ pätee $U(y) \cap A_{j_y} = \emptyset$, $\forall j_y \geq j_0$. Siis on taas osoitettu, että eli siis $U(x_0) \subset \complement A_i$ eli $\complement A_i \subset X$ on avoin.

$\therefore A_s, A_i \subset X$ ovat suljettuja.

(b) Pitää osoittaa, että $A_s = \bar{A}_s = \limsup\limits_{j\to\infty} \bar{A}_j$ ja $A_i = \bar{A}_i = \liminf\limits_{j\to\infty} \bar{A}_j$.

Koska $U \cap A_j \subset U \cap \bar{A}_j \; \forall j \in J \subset \mathbb{N}$ niin selvästi $A_s \subset \bar{A}_s$ ja $A_i \subset \bar{A}_i$.

Täytyy siis osoittaa vain että $\bar{A}_s \subset A_s$ ja $\bar{A}_i \subset A_i$.

Olkoon $x \in \bar{A}_s$. Olkoon $U \subset X$, U on avoin, s.e. $x \in U$. Merkitään $V = U \cup \bigcup\limits_{j\in J} \complement \bar{A}_j$. Nyt $V \subset X$ on avoin ja $x \in V$. Lisäksi:

$$V \cap A_j = (U \cap A_j) \cup \bigcup_{i\in J} (A_j \cap \complement \bar{A}_i) \neq \emptyset,$$

sillä jos

$$\begin{aligned} A_j \cap \complement \bar{A}_i = \emptyset \; \forall i \in J &\Rightarrow A_j \subset \bar{A}_i \; \forall i \in J \\ &\Rightarrow \bar{A}_j \subset \bar{A}_i \; \forall i \in J \\ &\Rightarrow \bar{A}_j = \bigcap_{i\in J} \bar{A}_i = \text{vakio}. \end{aligned}$$

Edellä käytettiin lausettta 1.12(3).

Siis jos $\exists j, i \in \mathbb{N}$ s.e. $\bar{A}_i \neq \bar{A}_j$ eli $\bar{A}_i \neq$ vakio $\forall i \in J$ niin $\bigcup\limits_{i\in J} (A_j \cap \complement \bar{A}_i) \neq \emptyset$.

Tapauksessa $\bar{A}_i =$ vakio $= \bar{A} \; \forall i \in J$ nähdään sulkeuman määritelmästä 1.10, että $\bar{A}_s = \bar{\bar{A}} = \bar{A} = A_s$.

$\therefore A_s = \bar{A}_s$.

Olkoon $x \in \bar{A}_i$. Olkoon $U \subset X$, U avoin, s.e. $x \in U$. Merkitään $V = U \cup \bigcup\limits_{j\geq j_0} \complement \bar{A}_j$, missä $j_0 \in \mathbb{N}$ ja j_0 on se indeksi, josta alkaen jokainen $\bar{A}_j$ kohtaa U:n. Nyt $V \subset X$, V on avoin, ja $x \in V$. Samoin kuin edellä saadaan

$\bar{A}_j = \bigcap_{i \geq j_0} \bar{A}_i =$ vakio, jos $A_j \cap \complement \bar{A}_i = \emptyset \; \forall j \geq j_0$. Kuten edellä, jos $\bar{A}_i = \bar{A} =$ vakio $\forall i \in J$ niin $\bar{A}_i = \bar{\bar{A}} = \bar{A} = A_i$.

$\therefore A_i = \bar{A}_i$.

(c) $X = \mathbb{N}, \mathcal{T} = \mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), A_1 = \{1\}, A_2 = \emptyset, A_3 = \{1\}, A_4 = \emptyset, \ldots, A_{2n+1} = \{1\}, A_{2n} = \emptyset, \ldots$

Jos $x \in X$ niin $x \in \{x\} \subset X$ on avoin ja $\{x\} \cap A_{2n} = \emptyset \; \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Siis $\liminf_{j \to \infty} A_j = \emptyset$.

Toisaalta valitsemalla $J = \{2n + 1 \; : \; n \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$ saadaan $1 \in \limsup_{j \to \infty} A_j \neq \emptyset$. $\square$