Topologia

Tehtävät 2:1-2:6

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 2:1: Osoita, että väli $[a,b[$ on avoin ja suljettu topologisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$. Määritä välin $]0,1[$ sulkeuma ja reuna.

Ratkaisu:

$\{[a,b[\ :\ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ on $\mathcal{T}_{\text{pa}}$:n kanta.

Kannan määritelmän 2.1(1) nojalla $[a,b[$ on avoin, kun $a,b \in \mathbb{R}, a < b$.

Nyt $\complement[a,b[\, = \,]-\infty, a[\cup[b,\infty[\, = (\bigcup_{n>|a|, n\in\mathbb{N}} [-n,a[) \cup (\bigcup_{n>|b|, n\in\mathbb{N}} [b,n[)$. Koska $[-n,a[$ ja $[b,n[$ ovat avoimia $\mathcal{T}_{\text{pa}}$:ssa, kun $n > |a|, |b|, n \in \mathbb{N}$, niin topologian määritelmän (T1) nojalla myös yhdisteet ja niiden yhdiste ovat avoimia. Siis $\complement[a,b[$ on avoin eli $[a,b[$ on suljettu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$:ssa.

Koska $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$ niin $]0,1[$ on avoin $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$:ssa. Edellisen nojalla $[0,1[$ on suljettu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$:ssa, mistä seuraa lauseen 1.12(8) nojalla että:

$\overline{[0,1[} = [0,1[= \overline{\{0\}\cup]0,1[} = \overline{\{0\}} \cup \overline{]0,1[} \Rightarrow \overline{]0,1[} = [0,1[\setminus\overline{\{0\}}$

Merkitsemällä $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ näemme lisäksi, että $\{0\}$ on suljettujen joukkojen (numeroituvasti) äärettömänä leikkauksena suljettu. Siis $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Saadaan siis $\overline{]0,1[} =]0,1[$. Lauseen 1.14(7) nojalla saadaan $\partial]0,1[= \overline{]0,1[}\setminus]0,1[= \emptyset$. $\square$

Tehtävä 2:2: Tutki seuraavista kokoelmista $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, mitkä niistä ovat $\mathbb{R}$:n jonkin topologian kantoja:
(a) $\mathcal{B} = \{]x-1, x+1[\, : \ x \in \mathbb{R}\}$,
(b) $\mathcal{B} = \{[-1/n, 1/n] \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,
(c) $\mathcal{B} = \{]a, b[\cup]c, \infty[\, : \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ a < b < c\}$.
Myönteisessä tapauksessa vertaa saatua topologiaa $\mathbb{R}$:n tavalliseen topologiaan ja määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma.

Ratkaisu:

(a) Selvästi (K2) ei toteudu, sillä esim. $]-1,1[,]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\in \mathcal{B}$, mutta $]-1,1[\, \cap\,]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\, = \,]-\frac{1}{2}, 1[$ ja jos valitaan $x = 0$ niin esim. $]-1,1[\, \not\subset\,]-\frac{1}{2}, 1[$. Kuvainnollisesti voisi sanoa, että aina $|(x+1)-(x-1)| = 2$, joten välin $]x-1, x+1[$ pituus on 2 eikä se mahdu pituudeltaan 2:ta pienempiin väleihin, kuten väliin $]-\frac{1}{2}, 1[$, jonka pituus on vain $\frac{3}{2}$.

(b) Selvästi (K1) ei toteudu, sillä $\bigcup \mathcal{B} = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$.

(c) Kun $c \to -\infty$ niin huomataan, että $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$ eli (K1) toteutuu. Kun $B_1 =]a_1, b_1[\cup]c_1, \infty[$ ja $B_2 =]a_2, b_2[\cup]c_2, \infty[$ niin
$B_1 \cap B_2 =]\max(c_1, c_2), \infty[$ tai
$B_1 \cap B_2 =]\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)[\cup]\max(c_1, c_2), \infty[\in \mathcal{B}$ (on olemassa kolmaskin mahdollisuus leikkaukselle $B_1 \cap B_2$. Nimittäin jos toinen joukoista sisältyy täysin toisen häntään. Silloinkin leikkaus $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$). Jos $B_1 \cap B_2 =]\max(c_1, c_2), \infty[$ niin selvästi $\forall x \in B_1 \cap B_2 \ \exists B \in \mathcal{B}$ s.e. $B \subset B_1 \cap B_2$. Siis (K2) toteutuu ja $\mathcal{B}$ on jonkin $\mathbb{R}$:n topologian $\mathcal{T}$ kanta.

$]a, b[\subset]a, b[\cup]c, \infty[$, joten lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$. Koska $]a, b[\cup]c, \infty[\in \mathcal{T}_{\text{tav}}$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ (koska $]c, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]c, n[$) niin

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{tav}}$.

Jos $x < 0$ niin $x \in]x-1, 0[\cup]2, \infty[= A$. Nyt A on avoin $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:ssa (koska se on kanta-alkion muotoa) ja lisäksi $A \cap]0, 1[= \emptyset$, joten lauseen 1.11 nojalla $x \notin \overline{]0, 1[}$. Samoin jos $x > 1$ niin $x \in]1, x+1[\cup]x+2, \infty[= B$, missä B on taas avoin, ja $B \cap]0, 1[= \emptyset$, joten taas $x \notin \overline{]0, 1[}$. Siis jos $x < 0$ tai $x > 1$ niin x ei ole $]0, 1[$:n kasautumis- tai erakkopiste. Jos sitten $x \in [0, 1]$ niin selvästi kaikille x:n ympäristöille U on $U \cap]0, 1[\neq \emptyset$. Siis $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$. $\square$

Tehtävä 2:3: Osoita, että vaakasuorat janat $J(a,b,c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b, y = c\}$, jossa $a,b,c \in \mathbb{R}$, muodostavat tason $\mathbb{R}^2$ erään topologian kannan. Mikä on kiekon B^2 sulkeuma?

Ratkaisu:

$\mathcal{B} = \{J(a,b,c) \ : \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Selvästi (K1) toteutuu eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}^2$. Myös (K2') toteutuu, koska kokoelman alkioiden leikkaus on joko $\emptyset$ tai (x-akselin suuntainen) jana. Siis $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n erään topologian kanta.

Kiekko $B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$ ja väitetään, että $\overline{B^2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$ eli että $\overline{B^2} = (B^2 \ \cup \ S^2) \setminus \{(0,1),(0,-1)\}$. Kuvainnollisesti voidaan sanoa, että kiekon sulkeuma koostuu kiekon B^2 ja ympyrän S^2 yhdisteestä vähennettynä pisteet $(0,1)$ ja $(0,-1)$. Perustelu on seuraava. Selvästi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ pisteillä (paitsi $(0,1)$ ja $(0,-1)$) kaikki ympäristöjanat koskettavat B^2:ta. Pisteet $(0,1)$ ja $(0,-1)$ jäävät pois, koska jana $J(a,b,1) \cap B^2 = \emptyset$ ja $J(a,b,-1) \cap B^2 = \emptyset$. Pisteillä $(0,1)$ ja $(0,-1)$ on siis ympäristöt, jotka eivät koske B^2:ta, joten ne eivät kuulu B^2:n sulkeumaan. $\square$

Tehtävä 2:4: Osoita, että kokoelma $\mathcal{B} = \{[a,b] \ : \ a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < b\}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian kanta. Todista:
(a) $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$,
(b) $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$,
(c) $\mathcal{T}_{\text{pa}} \not\subset \mathcal{T}$.

Ratkaisu:

Selvästi (K1) toteutuu eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$. Myös (K2') toteutuu, koska kokoelman alkioiden leikkaus on joko $\emptyset$ tai muotoa $[a,b]$, missä $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $a < b$. Siis $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kanta.

(a) Olkoon $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$, missä $\mathcal{B}_1$ on $\mathcal{T}_{\text{tav}}$:n kanta. Siis $B_1 =]a,b[$ jollakin $a,b \in \mathbb{R}, a < b$. Valitaan väliltä $]a,x[$ rationaaliluku $c \in \mathbb{Q}$ ja väliltä $]x,b[$ irrationaaliluku $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällöin $x \in [c,d] = B_2 \subset B_1$, joten lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$.

(b) Olkoon $\mathcal{B}_2 = \{[a,b[\ : \ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ eli $\mathcal{B}_2$ on siis $\mathcal{T}_{\text{pa}}$:n kanta. Valitaan lauseessa 2.12 $x = \pi$ ja $B_2 = [1,\pi]$. Selvästikään ei ole olemassa puoliavointa väliä $[a,b[$ s.e. $[a,b[\subset [1,\pi]$, mutta että kuitenkin olisi $\pi \in [a,b[$. Siis lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$.

(c) Olkoon taas $x = \pi$ ja $B_3 = [\pi, 4[$. Selvästikään ei ole olemassa sellaista väliä $[a,b]$, että $\pi \in [a,b] \subset [\pi, 4[$, mutta kuitenkin $a \in \mathbb{Q}$. Siis lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{pa}} \not\subset \mathcal{T}$. $\square$

Tehtävä 2:5: Olkoon $U(a,t) = \{a\} \cup [t, \infty[$, kun $a, t \in \mathbb{R}$. Osoita, että joukot $U(a,t)$ muodostavat joukon $\mathbb{R}$ erään topologian kannan. Todista saadusta avaruudesta $(X, \mathcal{T})$:
(a) X ei ole Hausdorff.
(b) X ei ole diskreetti.
(c) Jos $A \subset X$ on ylhäältä rajoitettu, niin A on diskreetti.
(d) Määritä joukkojen $]0,1[$ ja $\mathbb{N}$ sulkeumat.

Ratkaisu:
$\mathcal{B} = \{U(a,t) \ : \ a, t \in \mathbb{R}\}$.

Selvästi (K1) toteutuu eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$.
$U(a,t_1) \cap U(b,t_2) = U(a, \max(t_1,t_2)) \in \mathcal{B}$, jos $a = b$. Jos $a \neq b$ niin $U(a,t_1) \cap U(b,t_2) = [\max(t_1,t_2), \infty[$ (kuten tehtävässä 2:2(c) on olemassa myös kolmas mahdollisuus, jossa leikkauksen toinen jäsen sisältyy toisen häntään, mutta silloin leikkaus kuuluu $\mathcal{B}$:hen). Kaikille $x \in [\max(t_1,t_2), \infty[$ voidaan valita $U(x, \max(t_1,t_2) + |x|) = \{x\} \ \cup \ [\max(t_1,t_2) + |x|, \infty[$ s.e. $U(x, \max(t_1,t_2) + |x|) \subset [\max(t_1,t_2), \infty[$. Siis (K2) toteutuu eli $\mathcal{B}$ on topologian $\mathcal{T}$ kanta.

(a) Olkoon $a, b \in X, a \neq b$, ja olkoon $U \subset X$ a:n ympäristö ja $V \subset X$ b:n ympäristö. Lauseen 2.4(2) nojalla $\exists U(a', t_a) \in \mathcal{B}$ s.e. $U(a', t_a) \subset U$ ja samoin $\exists U(b', t_b) \in \mathcal{B}$ s.e. $U(b', t_b) \subset V$. Koska $\emptyset \neq U(a', t_a) \cap U(b', t_b) \subset U \cap V$ niin siis $U \cap V \neq \emptyset$ eli X ei ole Hausdorff.

(b) Diskreetti avaruus on aina Hausdorff, joten (a)-kohdan nojalla X ei ole diskreetti.

(c) Olkoon $A \subset X$, A ylhäältä rajoitettu ja $x \in A$. Täytyy osoittaa, että x on erakkopiste. Olkoon $\sup A$ A:n pienin yläraja. Nyt $U(x, \sup A + 1) = \{x\} \cup [\sup A + 1, \infty[\subset X$ on avoin x:n ympäristö. Koska $x \leq \sup A$ niin $U(x, \sup A + 1) \cap A = \{x\}$. Siis x on erakkopiste ja A siis diskreetti.

(d) $]0,1[$ on ylhäältä rajoitettu ($\sup]0,1[= 1$), joten (c)-kohdan nojalla se on diskreetti. Siis kaikki $]0,1[$:n pisteet ovat erakkopisteitä. 0 ja 1 eivät ole kasautumispisteitä, koska $0 \in \{0\} \cup [1, \infty[$ ja $1 \in \{1\} \cup [2, \infty[$ ja nämä ympäristöt eivät leikkaa $]0,1[$:tä. Muut pisteet $x < 0$ tai $x > 1$ eivät selvästikään voi myöskään olla kasautumispisteitä, koska niilläkin (kuten 0:lla ja 1:llä) on ympäristöt, jotka eivät leikkaa $]0,1[$:tä. Siis $\overline{]0,1[} \ =]0,1[$.

Muistin virkistykseksi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Kaikki reaaliluvut $\mathbb{R}$ ovat $\mathbb{N}$:n kasautumispisteitä, koska jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \in U(a,t)$, missä $a, t \in \mathbb{R}$, niin

$\#U(a,t) \cap \mathbb{N} = \infty$ eli $(U(a,t) \cap \mathbb{N}) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Siis $\overline{\mathbb{N}} = X = \mathbb{R}$. $\square$

Tehtävä 2:6: Osoita, että jos $\#X \leq 1$, niin X:n ainoalla topologialla on täsmälleen kaksi kantaa.

Ratkaisu:

Jos $\#X = 0$ niin sen ainoa topologia on $\{\emptyset\}$. Jos $\#X = 1$ niin ainoa topologia on $\mathcal{T}_{\text{mini}} = \{\emptyset, X\}$.

Tapaus $\#X = 0$: kanta on $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset\}$.

Tapaus $\#X = 1$: kanta on $\mathcal{B}_2 = \{X\}$.

$\therefore$ Jos $\#X \leq 1$ niin X:n ainoalla topologialla on täsmälleen kaksi kantaa. $\square$