Topologia

Tehtävät 2:7-2:11

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 2:7: Mikä on $\mathbb{R}^3$:n tasojen virittämä $\mathbb{R}^3$:n topologia?

Ratkaisu:

$\mathcal{A} = \{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = d\} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Jokaisen $\mathbb{R}^3$:n pisteen läpi voidaan piirtää taso, joten selvästi $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ eli $\mathcal{A}$ on $\mathbb{R}^3$:n peite. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ siis virittää jonkin $\mathbb{R}^3$:n topologian $\mathcal{T}$.

Tarkastellaan ensiksi karteesisen koordinaatiston xyz origoa. Selvästi se on kolmen tason leikkauksessa: nimittäin xy-, xz- ja yz-tasojen. Näiden tasojen leikkauspiste voidaan tietenkin kuvitella mihin tahansa $\mathbb{R}^3$:n pisteen kohdalle, joten siis yhden pisteen joukko on avoin $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T})$:ssä. Koska mikä tahansa joukko voidaan antaa yhdisteenä yhden pisteen joukoista niin $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{T}_{\text{dis}}$ eli $\mathcal{T}$ on diskreetti topologia. $\square$

Tehtävä 2:8: Olkoon $X = \{1, 2, \ldots, 5\}$. Osoita, että kokoelman $\mathcal{A} = \{A \ : \ A \subset X, \#A = 4\}$ virittämä X:n topologia on diskreetti.

Ratkaisu:

$\{x\} = \{x, a, b, c\} \cap \{x, b, c, d\} \cap \{x, a, b, d\} \cap \{x, a, c, d\}$

Siis kun $\{x, a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$ niin yhden pisteen joukko $\{x\}$ on avoin, joten X:n peitteen $\mathcal{A}$ ($\bigcup \mathcal{A} = X$) virittämä X:n topologia $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$.
$\square$

Tehtävä 2:9: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, jossa jokaista pistettä $x \in X$ kohti on annettu jokin x:n ympäristökanta $\mathcal{B}(x)$. Osoita, että nämä toteuttavat kohdassa 1.16 mainitut Hausdorffin ehdot (H1)-(H3).

Ratkaisu:

(H1) Jos $U \in \mathcal{B}(x)$ niin U on x:n ympäristö, joten ympäristön määritelmän 1.4 nojalla $x \in U$.

(H2) Jos $U, V \in \mathcal{B}(x)$ niin $x \in U, V$ edellisen nojalla. Koska $\mathcal{B}(x)$ on ympäristökanta ja koska $x \in U \cap V \in \mathcal{T}$ niin $U \cap V$ on x:n ympäristö ja ympäristökannan määritelmän nojalla $\exists W \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $W \subset U \cap V$.

(H3) Olkoon $y \in U \in \mathcal{B}(x)$. Nyt siis $U \in \mathcal{T}$ ja koska $\mathcal{B}(y)$ on ympäristökanta ja U on y:n ympäristö niin ympäristökannan määritelmän nojalla $\exists V \in \mathcal{B}(y)$ s.e. $V \subset U$. $\square$

Tehtävä 2:10: Käänteisesti, olkoon X joukko, jossa jokaista pistettä $x \in X$ kohti on annettu sellainen kokoelma $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(X)$, että kohdan 1.16 ehdot (H1)-(H3) ovat voimassa. Sanomme joukkoa $A \subset X$ avoimeksi, jos jokaista $x \in A$ kohti on olemassa sellainen $U \in \mathcal{B}(x)$, että $U \subset A$. Todista:
(a) Avointen joukkojen kokoelma $\mathcal{T}$ on X:n topologia.
(b) $\mathcal{B}(x)$ on x:n ympäristökanta topologiassa $\mathcal{T}$.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{A \subset X \ : \ \forall x \in A \ \exists U \in \mathcal{B}(x) \text{ s.e. } U \subset A\}$

(a) (T1) Olkoon $A_j \in \mathcal{T}$ jollakin indeksijoukolla $J, j \in J$. Olkoon $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Nyt $x \in A_{j_1}$, jollakin indeksillä $j_1 \in J$. Koska $A_{j_1} \in \mathcal{T}$ niin $\exists U \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $U \subset A_{j_1} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$. Siis $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$ ja $V \neq \emptyset$. Oletetaan lisäksi, että $U \cap V \neq \emptyset$ (jos $U \cap V = \emptyset$ saadaan vastaus onko $U \cap V \in \mathcal{T}$ (T3):ssa). Olkoon $x \in U \cap V$. $\mathcal{T}$:n määritelmän nojalla $\forall y \in U \ \exists W \in \mathcal{B}(y)$ s.e. $W \subset U$ ja $\forall z \in V \ \exists D \in \mathcal{B}(z)$ s.e. $D \subset V$. Koska $x \in U, V$ niin $\exists W \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $W \subset U$ ja $\exists D \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $D \subset V$.

(H2) $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $B \subset W \cap D \subset U \cap V$. Siis $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \subset X$ ja $\emptyset \subset \emptyset$, joten $\emptyset \in \mathcal{T}$. Toisaalta $\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $U \subset X$, joten $X \in \mathcal{T}$.

(b) Olkoon $V \in \mathcal{B}(x)$. Olkoon $y \in V$. (H3):sta seuraa, että $\forall y \in V \in \mathcal{B}(x) \ \exists W \in \mathcal{B}(y)$ s.e. $W \subset V$. Siis $V \in \mathcal{T}$. Lisäksi (H1):n nojalla $x \in V$ eli V on x:n ympäristö. Siis $\mathcal{B}(x)$ on kokoelma x:n ympäristöjä. Jos U on x:n ympäristö eli $x \in U \in \mathcal{T}$ niin $\mathcal{T}$:n määritelmän nojalla $\exists D \in \mathcal{B}(x)$ s.e. $D \subset U$. Siis $\mathcal{B}(x)$ on todellakin x:n ympäristökanta. $\square$

Tehtävä 2:11: Olkoon $(H, \leq)$ täysin järjestetty joukko. Osoita, että H on Hausdorffin avaruus järjestystopologiassa.

Ratkaisu:

Jos $\#H \leq 1$ niin kirjan mukaan avaruus on Hausdorff. Oletetaan, että $\#H \geq 2$. Koska $(H, \leq)$ on täysin järjestetty joukko, voidaan rajoituksetta olettaa, että $x, y \in H, x \neq y$ ja $x < y$.

Tapaus $\#H = 2$: $x \in [x, y[$ ja $y \in]x, y]$, mutta $[x, y[\cap]x, y] = \emptyset$, joten H on Hausdorff.

Tapaus $\#H \geq 3$: Tämä jakautuu kahteen tapaukseen, jotka tutkitaan seuraavaksi.

Tapaus 1: $\exists a \in H$ s.e. $x < a < y$. Silloin valitaan x:n ympäristöksi joko $[m, a[$ (x voi olla m) tai $]b, a[$, missä $b < x$ ja y:n ympäristöksi joko $]a, M]$ (y voi olla M) tai $]a, c[$, missä $c > y$. Nyt:

$[m, a[\cap]a, M] = [m, a[\cap]a, c[=]b, a[\cap]a, M] =]b, a[\cap]a, c[= \emptyset$, joten H on Hausdorff.

Tapaus 2: $\nexists a \in H$ s.e. $x < a < y$. Silloin valitaan x:n ympäristöksi joko $[m, y[$ (x voi olla m) tai $]b, y[$, missä $b < x$ ja y:n ympäristöksi joko $]x, M]$ (y voi olla M) tai $]x, c[$, missä $c > y$. Nyt:

$[m, y[\cap]x, M] = [m, y[\cap]x, c[=]b, y[\cap]x, M] =]b, y[\cap]x, c[= \emptyset$, joten H on Hausdorff.

$\therefore$ H on järjestystopologialla varustettuna Hausdorffin avaruus. $\square$