Topologia

Tehtävät 3:1-3:8

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 3:1: Olkoon X avaruus. Funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on alaspäin puolijatkuva, jos jokaista $a \in X$ ja jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen a:n ympäristö U, että $f(x) > f(a) - \epsilon$ kaikilla $x \in U$. Osoita, että f on alaspäin puolijatkuva tarkalleen silloin, kun f on jatkuva kohdassa 1.2.8 esitetyn $\mathbb{R}$:n topologian suhteen. Anna esimerkki alaspäin puolijatkuvasta funktiosta, joka ei ole jatkuva.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{]a, \infty[: \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

$\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n eräs topologia (tehtävä 1:4).

Olkoon f alaspäin puolijatkuva. Olkoon $a \in X$ ja $f(a) \in V \in \mathcal{T}$, missä V on $f(a)$:n ympäristö: $V \neq \emptyset$ ja $V \neq \mathbb{R}$. Siis $\exists b \in \mathbb{R}$ s.e. $V =]b, \infty[$. Olkoon $\epsilon = f(a) - b > 0$. Koska f on alaspäin puolijatkuva niin $\exists U \in \mathcal{T}, a \in U$, s.e. $f(x) > f(a) - \epsilon = b \ \forall x \in U$. Siis $fU \subset V$ eli f on jatkuva.

Olkoon f jatkuva ja olkoon $a \in X$ ja $\epsilon > 0$. Nyt $f(a) \in]f(a) - \epsilon, \infty[\in \mathcal{T}$, joten $]f(a) - \epsilon, \infty[$ on $f(a)$:n ympäristö ja f:n jatkuvuuden nojalla $\exists U \in \mathcal{T}, a \in U$, s.e. $fU \subset]f(a) - \epsilon, \infty[$.

Siis $\forall \epsilon > 0 \ \exists U \in \mathcal{T}, a \in U$, s.e. $f(x) > f(a) - \epsilon \ \forall x \in U$ eli f on alaspäin puolijatkuva.

$\therefore f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on alaspäin puolijatkuva tarkalleen silloin kun f on jatkuva.

Olkoon $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}), f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leq 0 \\ 1, \text{ kun } x > 0 \end{cases}.$

Selvästi f ei ole jatkuva 0:ssa, mutta on alaspäin puolijatkuva, sillä $f(0) = 0$ ja $f(x) > 0 - \epsilon \ \forall \epsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Lisäksi, jos $a < 0$ niin $f(x) > f(a) - \epsilon = 0 - \epsilon \ \forall \epsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ja jos $a > 0$ niin $f(x) > f(a) - \epsilon = 1 - \epsilon \ \forall \epsilon > 0$ ja $\forall x \in]0, \infty[\in \mathcal{T}$. $\square$

Tehtävä 3:2: Olkoon X avaruus, $A \subset X$ ja $f = \chi_A : X \to \mathbb{R}$ joukon A karakteristinen funktio, ts. $f(x) = 1$, kun $x \in A$, ja $f(x) = 0$, kun $x \notin A$. Osoita, että

$$\partial A = \{x \in X : f \text{ on epäjatkuva pisteessä x}\}.$$

Ratkaisu:

$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ on suljettu $\mathbb{R}$:ssä.

Olkoon $a \in \text{int}A \subset A$. Tällöin $f(a) = 1$. Olkoon $V \in \mathcal{T}_{\text{tav}}$ 1:n jokin ympäristö.

$f(\text{int}A) \subset fA = ff^{-1}\{1\} = \{1\} \subset V$.

Siis jokaista $f(a)$:n ympäristöä V kohti on olemassa a:n ympäristö int$A$ s.e. $f(\text{int}A) \subset V$. Siis f on jatkuva kun $a \in \text{int}A$.

Tapaus $a \in \text{ext}A = \text{int}\complement A \subset \complement A$ ja $f(a) = 0$ perustellaan samoin kuin edellinen tapaus.

$\therefore$ f on jatkuva $\text{int}A \cup \text{ext}A$:ssa.

Olkoon nyt $a \in \partial A$ ja oletetaan, että f on jatkuva a:ssa. Koska $X = A \cup \complement A$ niin $f(a) = 0$ tai $f(a) = 1$.

Tapaus $f(a) = 0$: Olkoon $V \in \mathcal{T}_{\text{tav}}$ 0:n ympäristö, jolloin myös $V \setminus \{1\}$ on 0:n ympäristö. Koska f on jatkuva a:ssa niin $\exists U$, joka on a:n ympäristö, s.e. $fU \subset V \setminus \{1\}$. Kuitenkin koska $a \in \partial A$ niin $U \cap A \neq \emptyset$ ja $U \cap \complement A \neq \emptyset$. Siis:

$f(U \cap A) = \{1\} \subset fU \subset V \setminus \{1\}$ eli $1 \in V \setminus \{1\}$, mikä on ristiriita.

Tapaus $f(a) = 1$ palautuu edelliseen tapaukseen, kun korvataan $0 \to 1$ ja $A \to \complement A$.

Koska $X = \text{int}A \cup \text{ext}A \cup \partial A$ saadaan, että
$\partial A = \{x \in X : f \text{ on epäjatkuva pisteessä x}\}$. $\square$

Tehtävä 3:3: Olkoon X sellainen avaruus, että jokainen kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Osoita, että X on diskreetti.

Ratkaisu:

Edellisessä tehtävässä 3:2 osoitettiin, että yhden pisteen joukko $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}})$:ssa on suljettu.

Olkoon $x \in X$ ja $f(y) = \begin{cases} 1, \text{ kun } y = x \\ 0, \text{ kun } y \in X \setminus \{x\} \end{cases}.$

f:n jatkuvuudesta seuraa lauseen 3.3(3) nojalla että $f^{-1}\{0\} = X \setminus \{x\}$ on suljettu, mistä seuraa että $\complement(X \setminus \{x\}) = \{x\}$ on avoin.

$\therefore$ Kaikki joukot X:ssä ovat avoimia eli X on diskreetti. $\square$

Tehtävä 3:4: Osoita, että väli $[0,1]$ voidaan jatkuvasti kuvata kahden pisteen avaruudelle $Y = \{0,1\}$, jonka avoimet joukot ovat $\emptyset, \{0\}$ ja Y.

Ratkaisu:

Varustetaan väli $[0,1]$ järjestystopologialla, jolloin se on avaruus.

$$f : [0,1] \to Y, f(x) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \in]0,1] \\ 1, \text{ kun } x = 0 \end{cases}.$$

$f^{-1}\emptyset = \emptyset, f^{-1}\{0\} =]0,1]$ ja $f^{-1}Y = [0,1]$. Nämä kaikki ovat avoimia, joten lauseen 3.3(2) nojalla f on jatkuva. $\square$

Tehtävä 3:5: Yhtälö $f(x) = -x$ määrittelee kuvauksen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tutki, onko f jatkuva, kun sekä lähdössä että maalissa on topologia $\mathcal{T}_{\text{pa}}$.

Ratkaisu:

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}}), f(x) = -x$

$f^{-1}[-a, \infty[=]-\infty, a]\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Jos $]-\infty, a]$ olisi avoin niin yhden pisteen joukko $\{a\} =]-\infty, a] \cap [a, \infty[$ olisi avoin eli $\mathcal{T}_{\text{pa}} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$ mikä on ristiriita.

Siis $]-\infty, a]$ ei ole avoin eli f ei ole jatkuva. $\square$

Tehtävä 3:6: Osoita, että projektio $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on avoin, mutta ei suljettu kuvaus.

Ratkaisu:

$pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, pr_1(x, y) = x$

$\mathcal{B} = \{]a, b[\times]c, d[: \ a, b, c, d \in]0, \infty[, a < b, c < d\}$ on $\mathcal{T}_{\mathrm{tav}}$:n eräs kanta.

$pr_1(]a, b[\times]c, d[) =]a, b[$, joka on avoin $\mathbb{R}$:ssä, joten lauseen 3.10 nojalla pr_1 on avoin kuvaus.

Merkitään $A = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in]0, \infty[\}$. Olkoon $\vec{x} \in \complement A$. Selvästi $\exists r > 0$ s.e. $B(\vec{x}, r) \subset \complement A$, joten lauseen 1.5 nojalla $\complement A$ on avoin eli A on suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa.

Nyt kuitenkin $pr_1 A =]0, \infty[$, mikä on avoin $\mathbb{R}$:ssä. Siis pr_1 ei ole suljettu kuvaus. $\square$

Tehtävä 3:7: Osoita funktion $f(x) = x \sin x$ avulla, ettei lauseen 3.10 vastine esikannoille ole tosi.

Ratkaisu:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \sin x$

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

Tarkastellaan väliä $x \in]0, \pi[$. Tällöin $x = -\tan x$ vain kohdassa $x_0 \approx 2$. Siis $f]0, \pi[=]0, x_0 \sin x_0]$ eli f ei ole avoin kuvaus. Kuitenkin $f] - \infty, a[= f]a, \infty[= \mathbb{R}$ ovat avoimia $\mathbb{R}$:ssä, joten lauseen 3.10 vastine esikannoille ei ole tosi. $\Box$

Tehtävä 3:8: Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sellainen jatkuva kuvaus, että $|f(x)| \to \infty$, kun $|x| \to \infty$. Osoita, että f on suljettu kuvaus. Osoita tämän avulla, että jokainen polynomi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on suljettu. Vihje: ratkaisussa tarvitaan Topologia osan I tietoja kompaktiudesta.

Ratkaisu:

Heinen-Borelin lause:

Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti $\Leftrightarrow$ A on suljettu ja rajoitettu.

Olkoon A suljettu $\mathbb{R}^n$:ssä. Tällöin joukko $A \cap \overline{B}(0,k)$ on myös suljettu $\forall k \in \mathbb{N}$. Se on myös rajoitettu, joten se on kompakti. Jatkuva kuvaus f kuvaa siis sen suljetuksi joukoksi (lauseen 3.11 nojalla). Nyt:

$fA = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(A \cap \overline{B}(0,k))$

Osoitetaan induktiolla, että fA on suljettu.

Perusaskel: $\bigcup_{k=1} f(A \cap \overline{B}(0,k)) = f(A \cap \overline{B}(0,1))$ on suljettu $\mathbb{R}^p$:ssä.

Induktio-oletus: Selvästi $\bigcup_{k=1}^{n} f(A \cap \overline{B}(0,k))$ on suljettu $\mathbb{R}^p$:ssä.

Induktioväite: $\bigcup_{k=1}^{n+1} f(A \cap \overline{B}(0,k)) = \bigcup_{k=1}^{n} f(A \cap \overline{B}(0,k)) \cup f(A \cap \overline{B}(0,n+1))$, missä viimeinen muoto on suljettu, koska kahden joukon yhdiste on suljettu. Induktioväite on siis tosi.

$\therefore$ $fA = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(A \cap \overline{B}(0,k))$ on suljettu $\mathbb{R}^p$:ssä eli f on suljettu kuvaus.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ n \in \mathbb{N}.$

Tiedetään, että $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$, joten $\lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = \lim_{|x| \to \infty} |a_n||x^n| = \infty$. Lisäksi tiedetään että f polynomina on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä. Siis f on edellisen nojalla suljettu kuvaus.

$\therefore$ Jokainen polynomi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on suljettu kuvaus. $\square$

Käsittääkseni induktio ei toimi näin, joten tehtävä jäi tekemättä.