Topologia

Tehtävät 3:17-3:22

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 3:17: Todista 3.16:n tulos 2. *Neuvo.* Käytä edellistä tehtävää tai sen neuvoa.

Ratkaisu:

Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $\mathcal{F}$ X:n filtterikanta, joka suppenee kohti a:ta. Merkitään $\mathcal{F}' = \{fA \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ ja osoitetaan, että $\mathcal{F}'$ on filtterikanta, joka suppenee kohti $f(a)$:ta. Nyt $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(Y)$.

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}' \neq \emptyset$,

(2) $\emptyset \notin \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{F}'$,

(3) Olkoon $A', B' \in \mathcal{F}'$. Silloin $\exists A, B \in \mathcal{F}$ s.e. $A' = fA$ ja $B' = fB$. Koska myös $\mathcal{F}$ on filtterikanta, $\exists C \in \mathcal{F}$ s.e. $C \subset A \cap B$. Merkitsemällä $C' = fC \in \mathcal{F}'$ saadaan $f^{-1}C' \subset f^{-1}A' \cap f^{-1}B' = f^{-1}(A' \cap B') \Rightarrow C' \subset A' \cap B'$.

$\therefore$ $\mathcal{F}'$ on filtterikanta.

Olkoon V $f(a)$:n ympäristö. f on jatkuva a:ssa, joten $\exists U \subset f^{-1}V$ s.e. $a \in U$ ja U on a:n ympäristö. $\mathcal{F}$ suppenee kohti a:ta, joten $\exists A \in \mathcal{F}$ s.e. $A \subset U$. Siis $\exists A' = fA \subset fU \subset ff^{-1}V = V$, missä $A' \in \mathcal{F}'$. Siis $\mathcal{F}'$ suppenee kohti $f(a)$:ta.

Olkoon sitten $\mathcal{F}' = \{fA \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ filtterikanta, joka suppenee kohti $f(a)$:ta, aina kun $\mathcal{F}$ on X:n jokin filtterikanta, joka suppenee kohti a:ta.

Olkoon nyt $B \subset X$ ja $a \in \overline{B}$. Tehtävän 3:16 nojalla on olemassa filtterikanta $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(B)$, joka suppenee kohti a:ta. Siis filtterikanta $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(fB)$ suppenee kohti $f(a)$:ta. Siis taas tehtävän 3:16 nojalla (toisinpäin) $f(a) \in \overline{fB}$. Lauseen 3.2 nojalla siis f on jatkuva pisteessä a. $\square$

Tehtävä 3:18: Kokoelma $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X), \mathcal{F} \neq \emptyset$, on *filtteri* X:ssä, jos
(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,
(3) $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

Todista: (a) Jokainen filtteri on myös filtterikanta. (b) Jos $\mathcal{F}$ on filtterikanta X:ssä, niin kokoelma $\{A \subset X \ : \ A \supset B$ jollakin $B \in \mathcal{F}\}$ on filtteri.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filtteri.

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
(2) Filtteriehdon (1) nojalla $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(3) Olkoon $A, B \in \mathcal{F}$. Koska $A \cap B \in \mathcal{F}$ (2):n nojalla ja $A \cap B \subset A \cap B$, voidaan merkitä $C = A \cap B$, jolloin filtterikantaehto (3) toteutuu.

(b) Olkoon $\mathcal{F}$ filtterikanta X:ssä ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$). Osoitetaan, että kokoelma $\mathcal{F}' = \{A \subset X \ : \ A \supset B$ jollakin $B \in \mathcal{F}\}$ on filtteri. Nyt $\mathcal{F}' \neq \emptyset$, koska $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}'$, koska $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2) Olkoon $A', B' \in \mathcal{F}'$. Tällöin $\exists A, B \in \mathcal{F}$ s.e. $A \subset A'$ ja $B \subset B'$. Koska $\mathcal{F}$ on filtterikanta niin $\exists C \in \mathcal{F}$ s.e. $C \subset A \cap B \subset A' \cap B'$. Siis $\mathcal{F}'$:n määritelmän mukaan $A' \cap B' \in \mathcal{F}'$.
(3) Olkoon $A' \in \mathcal{F}'$ ja $A' \subset B' \subset X$. $A' \in \mathcal{F}' \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F}$ s.e. $A \subset A'$. Siis $A \subset A' \subset B'$, joten $\mathcal{F}'$:n määritelmän nojalla $B' \in \mathcal{F}'$. Siis $\mathcal{F}'$ on filtteri. $\square$

Tehtävä 3:19: Olkoon $X = \mathbb{R}$, jossa on kofiniitti topologia; ks. tehtävä 1:3. Mitä pisteitä kohti jono 1,2,3,... suppenee?

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \ : \ \#\complement U < \infty\} \cup \{\emptyset\}$

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \varphi(n) = n$

Merkitään $A(m) = \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{R}$, jolloin $\forall m \in \mathbb{N}$ pätee
$\varphi(n) \in \complement A(m) \cap \mathbb{N} \ \ \forall n \geq m + 1$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja U a:n ympäristö.

$\#(\complement U \cap \mathbb{N}) \leq \#\complement U < \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $\complement U \cap \complement A(m) \cap \mathbb{N} = \emptyset \ \ \forall m \geq n_0$.

Olkoon $n_1 = n_0 + 1$, jolloin $\complement U \cap \complement A(m) \cap \mathbb{N} = \emptyset \ \ \forall m \geq n_1$.

Nyt
$\varphi(n) \in \mathbb{R} \cap \complement A(n_0) \cap \mathbb{N} = (U \cup \complement U) \cap \complement A(n_0) \cap \mathbb{N} = U \cap \complement A(n_0) \cap \mathbb{N} \subset U \ \ \forall n \geq n_1$.

$\therefore \varphi_n \to a \in \mathbb{R}$. $\square$

Tehtävä 3:20: Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ tehtävän 1:7 avaruus. Todista:
(a) Avaruuden jono (x_n) suppenee kohti pistettä a, jos ja vain jos on olemassa sellainen n_0, että $x_n = a$, kun $n \geq n_0$.
(b) Piste 0 kuuluu välin $A = [1, 2]$ sulkeumaan, mutta mikään A:n jono ei suppene kohti 0:aa.
(c) Jokainen kuvaus f tästä avaruudesta toiseen avaruuteen toteuttaa ehdon: jos $x_n \to a$, niin $f(x_n) \to f(a)$. Anna esimerkki, jossa f on epäjatkuva.

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} \ : \ \mathbb{R} \setminus U \text{ on numeroituva}\} \cup \{\emptyset\}$

(a) Olkoon (x_n) jono, joka suppenee kohti a:ta (avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$).

$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x_k\}$ on numeroituva $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x_k\} = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \complement\{x_k\} = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_k\}) \in \mathcal{T} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Tehdään vasta-oletus: $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ s.e. $a \in \bigcap\limits_{k=n_1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_k\})$. Siis $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n \in \bigcap\limits_{k=n_2}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_k\}) \ \ \forall n \geq n_2$. Siis esim. $x_{n_2} \in \mathbb{R} \setminus \{x_{n_2}\}$, mikä on ristiriita.

Siis $a \notin \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_k\}) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \complement \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_k\}) = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x_k\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Olkoon $b \in \mathbb{R}, b \neq a$ ja $b \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x_k\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Koska $a \in \mathbb{R} \setminus \{b\} \in \mathcal{T}$, joten $\exists n_3 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{b\} \ \ \forall n \geq n_3$. Nyt siis $b \in \bigcup\limits_{k=n_3}^{\infty} \{x_k\} \subset \mathbb{R} \setminus \{b\}$, mikä on ristiriita.

$\therefore \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $a \in \bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty} \{x_k\} = \{a\} \Rightarrow x_n = a \ \ \forall n \geq n_0.$

Oletetaan, että $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = a$, kun $n \geq n_0$. Olkoon $a \in U$ ja U a:n ympäristö. Siis $x_n \in U \ \ \forall n \geq n_0$ eli $x_n \to a$.

(b) Vasta-oletus: $0 \notin \overline{A} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}$, missä U on 0:n ympäristö s.e. $U \cap A = \emptyset$.

$U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset \complement U$ eli A on numeroituva, mikä on ristiriita.

$\therefore 0 \in \overline{A}$.

Vasta-oletus: $\exists (x_n) : \mathbb{N} \to A \subset \mathbb{R}$ s.e. $x_n \to 0$. (a)-kohdan nojalla $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = 0 \ \ \forall n \geq n_0$. Koska $x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ niin $0 \in A$, mikä on ristiriita.

(c) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$

Olkoon $x_n \to a$. (a)-kohdan nojalla $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = a \ \ n \geq n_0$. Olkoon U $f(a)$:n ympäristö. $\forall n \geq n_0 \ \ f(x_n) = f(a) \in U$ eli $f(x_n) \to f(a)$.

Valitaan $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}), f = \chi_{[1,2]}$, jolloin f on epäjatkuva pisteissä $\partial[1,2]$ tehtävän 3:2 mukaan. Nyt $0 \in \partial[1,2]$, joten $\partial[1,2] \neq \emptyset$. $\square$

Tehtävä 3:21: Todista, että jatkuva kuvaus on suljettu, jos ja vain jos $\overline{fA} = f\overline{A}$ kaikilla $A \subset X$.

Ratkaisu:

Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva suljettu kuvaus ja $A \subset X$. $f\overline{A}$ on suljettu, joten $fA \subset f\overline{A} \Rightarrow \overline{fA} \subset f\overline{A}$. Lauseen 3.3(4) nojalla $f\overline{A} \subset \overline{fA}$ eli $f\overline{A} = \overline{fA}$.

Olkoon $f\overline{A} = \overline{fA}\ \ \forall A \subset X$. Taas lauseen 3.3(4) nojalla f on jatkuva. Jos A on suljettu niin $A = \overline{A}$ ja $fA = f\overline{A} = \overline{fA}$ eli f on suljettu kuvaus. $\square$

Tehtävä 3:22: Olkoot X ja Y Hausdorffin avaruuksia, $f : X \to Y$ avoin jatkuva kuvaus ja $\#f^{-1}\{y\} \leq N < \infty$ kaikilla $y \in Y$. Osoita, että jos $\#f^{-1}\{y\} = N$, niin jokaisella pisteellä $x \in f^{-1}\{y\}$ on ympäristö, jossa f on injektio. *Neuvo.* Valitse aluksi joukon $f^{-1}\{y\}$ pisteille erilliset ympäristöt.