Topologia

Tehtävät 3:9-3:16

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 3:9: Osoita, että tason osajoukko $A = \{(x, \sin(1/x)) \ : \ x > 0\}$ on homeomorfinen $\mathbb{R}$:n kanssa.

Ratkaisu:

$f : A \to \mathbb{R}, f(x, \sin(1/x)) = x - \frac{1}{x}$.

Selvästi f on jatkuva bijektio, joten f^{-1} on olemassa.

Osoitetaan, että $f^{-1} : \mathbb{R} \to A, f^{-1}(x) = (\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}, \sin(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}))$ suoralla laskulla.

$$
\begin{aligned}
ff^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} - \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} &= \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^2 - 4}{2(x+\sqrt{x^2+4})} \\
&= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+4} + x^2 + 4 - 4}{2(x+\sqrt{x^2+4})} \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{x+\sqrt{x^2+4}} \cdot x \\
&= x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{-1}f(x, \sin(1/x)) &= (\frac{x - \frac{1}{x} + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2 + 4}}{2}, \sin(\frac{2}{x - \frac{1}{x} + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}})) \\
&= (\frac{x - \frac{1}{x} + \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}}{2}, \sin(\frac{2}{x - \frac{1}{x} + \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4}})) \\
&= (x, \sin(1/x)).
\end{aligned}
$$

Myös f^{-1} on komponenteittain jatkuva.

$\therefore$ f on homeomorfismi ja $A \approx \mathbb{R}$. $\square$

Tehtävä 3:10: Olkoon $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ avoin konveksi rajoitettu joukko, joka sisältää origon. Osoita, että yhtälön $f(x) = x/|x|$ määrittelemä kuvaus $f : \partial D \to S^{n-1}$ on homeomorfismi.

Ratkaisu:

13.9 Reunanylityslause: Olkoon $E \subset X$ yhtenäinen ja $D \subset X$. Jos E kohtaa D:n ja $\complement D$:n, se kohtaa myös ∂D:n.

Määritellään $\forall x \in D, E(x) = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda \in [0, \infty[\}$ (eli $E(x)$ on x:n suuntainen $\mathbb{R}^n$:n origosta lähtevä puolisuora). Nyt $E(x)$ on yhtenäinen (jopa konveksi) ja kohtaa D:n ja $\complement D$:n (koska D on rajoitettu) eli kohtaa reunanylityslauseen nojalla myös ∂D:n. f on siis surjektio.

Olkoon $a, b \in \partial D$. f on injektio, sillä muuten D ei ole konveksi (D sisältää origon) avoin joukko. Nimittäin, jos $a \neq b$ (voidaan olettaa, että $|a| < |b|$), mutta $f(a) = f(b)$ niin kulkemalla puolisuoraa pitkin origosta pisteeseen b kuljetaan pisteen $a \in \partial D$ kautta, mikä ei käy koska D on avoin. (Jos jana eli pätkä puolisuoraa onkin ∂D:ssä niin mitä sitten?).

$\therefore$ f on bijektio.

Lauseen 3.6.2 nojalla f on jatkuva.

$$
\begin{aligned}
D \text{ on rajoitettu} \quad &\Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \text{ s.e. } D \subset \overline{B}^n(0, k) \\
&\Rightarrow \quad \overline{D} \subset \overline{B}^n(0, k) \\
&\Rightarrow \quad \partial D \subset \overline{B}^n(0, k+1) \\
&\Rightarrow \quad \partial D \text{ on rajoitettu.}
\end{aligned}
$$

∂D on siis suljettu ja rajoitettu eli kompakti $\mathbb{R}^n$:ssä. Kompaktissa joukossa jatkuva bijektio on homeomorfismi eli f on siis homeomorfismi. $\square$

Tehtävä 3:11: Osoita, että edellisen tehtävän kuvaus f voidaan jatkaa homeomorfismiksi $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Osoita, että $FD = B^n$. *Ohje.* Merkitse $g = f^{-1}$ ja määrittele $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ asettamalla $G(\overline{0}) = \overline{0}$ ja $G(x) = |x|g(x/|x|)$, kun $x \neq \overline{0}$.

Ratkaisu:

$g = f^{-1} : S^{n-1} \to \partial D$, g on HM (hyvin määritelty) bijektio.

$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, G(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \\ |x|g(\frac{x}{|x|}), & \text{kun } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{cases}$

Olkoon $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Koska, kuten edellisessä tehtävässä 3:10 todettiin, ∂D on "ehyt", niin jollakin $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pätee $c \upuparrows g(\frac{x}{|x|})$. Siis $\exists \lambda > 0$ s.e. $c = \lambda g(\frac{x}{|x|}) \Rightarrow G(\frac{|c| \cdot \frac{x}{|x|}}{|g(\frac{x}{|x|})|}) = \frac{|c|}{|g(\frac{x}{|x|})|} g(\frac{x}{|x|}) = \lambda g(\frac{x}{|x|}) = c$. G on siis surjektio.

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^n, a \neq 0 \neq b$ ja:

$$\begin{aligned}
G(a) = G(b) &\Rightarrow |a|g(\frac{a}{|a|}) = |b|g(\frac{b}{|b|}) \ (*) \\
&\Rightarrow \frac{|b|}{|a|}g(\frac{b}{|b|}) = g(\frac{a}{|a|}) \in \partial D \\
&\Rightarrow \frac{a}{|a|} = f(\frac{|b|}{|a|}g(\frac{b}{|b|})) = \frac{\frac{|b|}{|a|}g(\frac{b}{|b|})}{\frac{|b|}{|a|}|g(\frac{b}{|b|})|} \\
&\Rightarrow \frac{b}{|b|} = f(\frac{|g(\frac{b}{|b|})|a}{|a|}) = \frac{a}{|a|} \ (**) \\
&\Rightarrow g(\frac{a}{|a|}) = g(\frac{b}{|b|}) \\
(*) &\Rightarrow (|a| - |b|)g(\frac{a}{|a|}) = 0 \\
&\Rightarrow |a| = |b| \\
(**) &\Rightarrow a = b.
\end{aligned}$$

$\therefore G$ on bijektio ja merkitsemällä $F = G^{-1}$ myös F on bijektio.

G on myös jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Kompaktissa joukossa S^{n-1} jatkuva funktio g on rajoitettu. Siis $|G(x)| = |x| \cdot |g(\frac{x}{|x|})| \geq |x| \inf_{x \in \mathbb{R}^n} |g(\frac{x}{|x|})| \to \infty$, kun $|x| \to \infty$, joten tehtävän 3:8 nojalla G on suljettu.

$\therefore G$ ja täten myös F on homeomorfismi.

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$

$g(\frac{x}{|x|})$ antaa suunnan ja $0 < |x| < 1$ antaa pituuden, joten
$GB^n = D \Rightarrow FD = B^n$. $\square$

Tehtävä 3:12: Olkoon $a \in B^n$. Osoita, että yhtälö $f(x) = (1 - |x|)a + x$ määrittelee homeomorfismin $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$, jolla $f(\overline{0}) = a$ ja $f|S^{n-1} = \mathrm{id}$. Millaisiksi joukoiksi f kuvaa $\overline{B}^n$:n säteet?

Ratkaisu:

$\mathbb{R}^n$:ssä pätee $||x| - |y|| \leq |x + y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Sijoitetaan $x = x_2$ ja $y = -x_1$, jolloin saadaan $||x_2| - |x_1|| \leq |x_2 - x_1|$ (*).

f:n injektiivisyys: $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned}(1 - |x_1|)a + x_1 = (1 - |x_2|)a + x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 - x_1 = (|x_2| - |x_1|)a \\ &\Rightarrow \quad |x_2 - x_1| = ||x_2| - |x_1|| \cdot |a|.\end{aligned}$$

Siis jos $|x_2| \neq |x_1|$ niin saadaan $\frac{|x_2 - x_1|}{||x_2| - |x_1||} = |a| < 1$, mikä on ristiriidassa (*):n kanssa. Siis $|x_2| = |x_1| \Rightarrow x_1 = x_2$.

f:n surjektiivisuus: Olkoon $b \in \overline{B}^n$. Koska $f|S^{n-1} = \mathrm{id}$ niin voidaan olettaa, että $b \in B^n$. Olkoon $\lambda \in [0, 1]$ ja $x \in S^{n-1}$.

$f(\lambda x) = (1 - |\lambda x|)a + \lambda x = (1 - \lambda)a + \lambda x$.

Siis f kuvaa $\overline{B}^n$:n säteet pisteestä a lähteviksi ja pisteeseen x ($\in S^{n-1}$) päättyviksi janoiksi. Koska minkä tahansa $b \in B^n$ läpi voidaan määrittää tällainen $\overline{B}^n$:n jana, $\exists x \in B^n$ s.e. $f(x) = b$ eli f on surjektio.

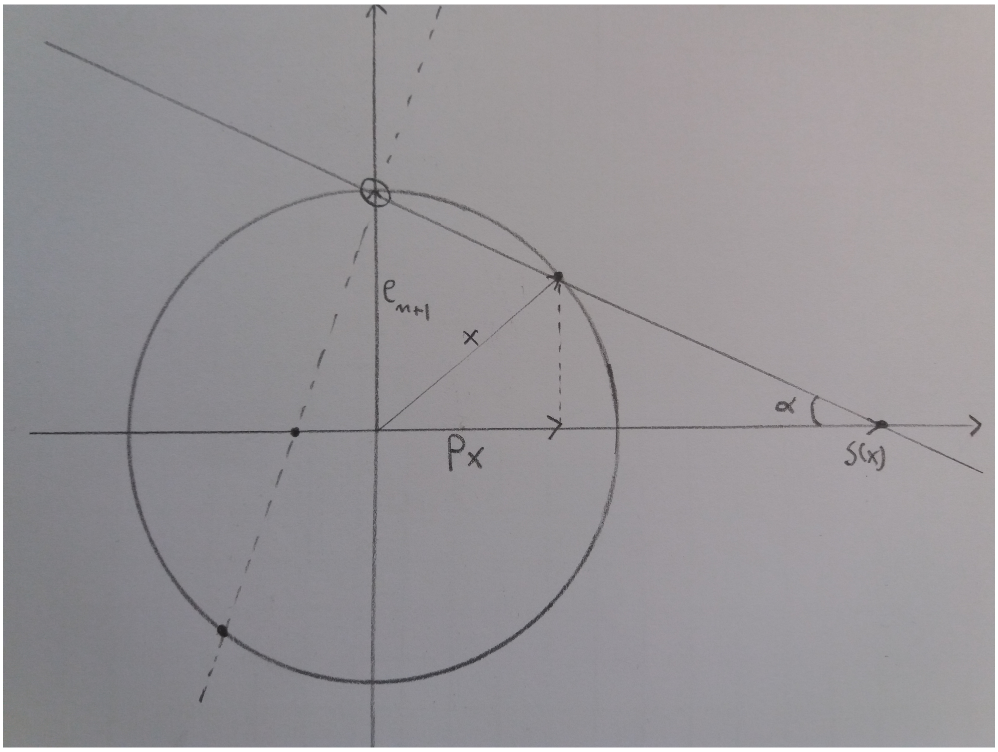
$\therefore$ f on bijektio.

Selvästi f on myös jatkuva ja koska $\overline{B}^n$ on suljettu ja rajoitettu eli kompakti niin f on homeomorfismi. $\square$

Tehtävä 3:13: *Stereografinen projektio* $s : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ määritellään vaatimalla, että pisteet e_{n+1}, x ja $s(x)$ ovat samalla suoralla, kun $x \in S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ ja $\mathbb{R}^n$ samastetaan $\mathbb{R}^{n+1}$:n aliavaruuden $\{x : x_{n+1} = 0\}$ kanssa. Olkoon $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ projektio $Px = (x_1, \ldots, x_n)$. Osoita, että s on homeomorfismi, ja johda lausekkeet

$$s(x) = \frac{Px}{1 - x_{n+1}}, \quad s^{-1}(y) = \frac{2y}{|y|^2 + 1} + \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} e_{n+1}.$$

Ratkaisu:



Selvästi $s(x) = \lambda Px$, missä $\lambda > 0 \Rightarrow |s(x)| = \lambda |Px|$. Nyt:

$$(\tan \alpha =) \frac{|e_{n+1}|}{|s(x)|} = \frac{|x_{n+1}|}{|s(x) - Px|} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda |Px|} = \frac{|x_{n+1}|}{|\lambda - 1||Px|} \ (x \neq -e_{n+1})$$
$$\Rightarrow \quad |\lambda - 1| = \lambda |x_{n+1}|.$$

Jos $x_{n+1} > 0 \Rightarrow \lambda > 1 \Rightarrow \lambda - 1 = \lambda x_{n+1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$.

Jos $x_{n+1} < 0 \Rightarrow \lambda < 1 \Rightarrow -\lambda + 1 = -\lambda x_{n+1} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$.

$\therefore\ s(x) = \frac{Px}{1-x_{n+1}}$.

Pisteet e_{n+1}, x ja $s(x)$ muodostavat tason ja tasossa ympyrän ja suoran leikkauspisteitä on korkeintaan 2 kpl. Siis s on injektio. Selvästi s on myös surjektio, joten s on bijektio ja siis s^{-1} on olemassa.

Koska projektio P ja id-funktio ovat jatkuvia (ja $-1 \leq x_{n+1} < 1$) niin myös osamäärä s on jatkuva.

Merkitään $\vec{x}$-vektorin koordinaatteja tasossa (Px, x_{n+1}). Esim. kuvasta nähdään, että:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{|Px|}{|s(x)|} + 1 \\ |Px|^2 + |x_{n+1}|^2 = 1. \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad |Px|^2 + |-\frac{|Px|}{|s(x)|} + 1|^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad |Px|^2 + \frac{|Px|^2}{|s(x)|^2} - \frac{2|Px|}{|s(x)|} + 1 = 1 \\
&\Rightarrow \quad |Px| = \frac{2|s(x)|}{|s(x)|^2 + 1} \\
&\Rightarrow \quad Px = \frac{2s(x)}{|s(x)|^2 + 1} \quad (\text{koska } s(x) = \lambda Px) \\
&\Rightarrow \quad x_{n+1} = -\frac{2}{|s(x)|^2 + 1} + 1 = \frac{|s(x)|^2 - 1}{|s(x)|^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Merkitsemällä $y = s(x) \Rightarrow (x =) s^{-1}(y) = \frac{2y}{|y|^2+1} + \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} e_{n+1}$. Selvästi myös s^{-1} on jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä, joten s on homeomorfismi. $\square$

Tehtävä 3:14: Todista 3.15:n tulos 1. *Neuvo.* Käytä a:n ympäristöjen muodostamaa suunnattua joukkoa.

Ratkaisu:

Olkoon $a \in \overline{E}$. Esimerkeistä 2.2 ja 2.15.3 seuraa, että ympäristökanta $\mathcal{B}(a)$ on olemassa. Lisäksi $\mathcal{B}(a)$ on suunnattu joukko, kun määritellään (kuten kirjassa) $U \leq V \Leftrightarrow U \supset V$, $\forall U, V \in \mathcal{B}(a)$. Jokaiselle $U \in \mathcal{B}(a)$ pätee $U \cap E \neq \emptyset$, koska $a \in \overline{E}$. Valitaan $\varphi(U) \in U \cap E$, jolloin muodostuu verkko $\varphi : \mathcal{B}(a) \to E$. Olkoon nyt V a:n ympäristö. Ympäristökannan määritelmän mukaan $\exists W \in \mathcal{B}(a)$, että $W \subset V$. Jos $S \geq W$ (eli $S \subset W$) niin myös $S \subset V$. Koska siis $\varphi(S) \in V$ aina kun $S \geq W$ niin φ suppenee kohti a:ta.

Olkoon $\varphi : A \to E$ verkko, joka suppenee kohti $a \in X$ (A on jokin suunnattu joukko). Olkoon $a \in U$ a:n ympäristö. φ suppenee kohti a:ta, joten $\exists \lambda \in A$ s.e. $\varphi(\alpha) \in U$, $\forall \alpha \geq \lambda$. Koska $\varphi(\alpha) \in E$ niin $\varphi(\alpha) \in U \cap E \neq \emptyset$. Siis $a \in \overline{E}$. $\square$

Tehtävä 3:15: Todista 3.15:n tulos 2. *Neuvo.* Käytä edellistä tehtävää tai sen neuvoa.

Ratkaisu:

Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva pisteessä $a \in X$ ja φ X:n verkko, joka suppenee kohti a:ta.

Nyt $f \circ \varphi : A \to Y$ on verkko (A on suunnattu joukko).

Olkoon V $f(a)$:n ympäristö. f:n jatkuvuuden nojalla $\exists U \subset f^{-1}V$, missä U on a:n ympäristö. Koska φ suppenee kohti a:ta niin $\exists \lambda \in A$ s.e. $\varphi(\alpha) \in U$, $\forall \alpha \geq \lambda$. Nyt siis $(f \circ \varphi)(\alpha) \in ff^{-1}V = V$, $\forall \alpha \geq \lambda$, joten $f \circ \varphi$ suppenee kohti $f(a)$:ta.

Olkoon nyt $B \subset X$ ja $a \in \overline{B}$. Edellisen tehtävän (3:14) mukaan $\exists \varphi : A \to B$ s.e. φ suppenee kohti a:ta. Nyt $f \circ \varphi : A \to fB$ on verkko, joka suppenee kohti $f(a)$:ta. Taas edellisen tehtävän mukaan siis $f(a) \in \overline{fB}$, mistä lauseen 3.2 nojalla seuraa, että f on jatkuva a:ssa. $\square$

Tehtävä 3:16: Todista 3.16:n tulos 1. *Neuvo.* Käytä a:n ympäristöjen muodostamaa filtterikantaa.

Ratkaisu:

Olkoon $a \in \overline{E}$, $\mathcal{F}$ a:n ympäristöjen muodostama filtterikanta ja U a:n jokin ympäristö. Merkitään $\mathcal{F}' = \{V \cap E \ : \ V \in \mathcal{F}\}$ ja osoitetaan, että myös $\mathcal{F}'$ on filtterikanta.

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

(2) $V \cap E \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{F}$, koska $\mathcal{F}$:n alkiot ovat a:n ympäristöjä ja $a \in \overline{E}$. Siis $\emptyset \notin \mathcal{F}'$.

(3) Olkoon $A', B' \in \mathcal{F}'$. Siis $A' = A \cap E$ ja $B' = B \cap E$ joillakin $A, B \in \mathcal{F}$. Koska $\mathcal{F}$ on filtterikanta niin $\exists W \in \mathcal{F}$ s.e. $W \subset A \cap B$. Siis
$\exists W' = W \cap E \subset A \cap B \cap E = A' \cap B'$.

$\therefore$ $\mathcal{F}'$ on filtterikanta E:ssä ($\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}(E)$).

Koska $U \in \mathcal{F}$ on a:n ympäristö, $U \cap E \in \mathcal{F}'$ ja $U \cap E \subset U$ niin filtterikanta $\mathcal{F}'$ suppenee kohti a:ta.

Olkoon $\mathcal{F}'$ filtterikanta E:ssä, joka suppenee kohti $a \in X$. Olkoon taas U a:n ympäristö. $\exists A \in \mathcal{F}'$ s.e. $A \subset U$. Koska
$A \subset E \Rightarrow \emptyset \neq A \cap E = A \subset U \cap E$. Siispä $U \cap E \neq \emptyset$ ja $a \in \overline{E}$. $\square$