Topologia

Tehtävät 4:1-4:4

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 4:1: Todista Lause 4.8.

Ratkaisu:

Käytetään kantalausetta 2.9. Merkitään $f^{-1}\mathcal{B} = \{f^{-1}B \ : \ B \in \mathcal{B}\}$, missä $\mathcal{B}$ on Y:n kanta.

(K1) $\mathcal{B}$ on Y:n kanta, joten
$\bigcup \mathcal{B} = Y \Rightarrow \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}B = f^{-1} \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = f^{-1} \bigcup \mathcal{B} = f^{-1}Y = X$ eli $f^{-1}B$:t muodostavat X:n peitteen.

(K2) $f^{-1}B_1, f^{-1}B_2 \in f^{-1}\mathcal{B}$. Olkoon
$x \in f^{-1}B_1 \cap f^{-1}B_2 = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Rightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$ ja koska $\mathcal{B}$ on Y:n kanta niin $\exists B \in \mathcal{B}$ s.e.
$f(x) \in B \subset B_1 \cap B_2 \Rightarrow x \in f^{-1}B \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}B_1 \cap f^{-1}B_2$.

$\therefore f^{-1}\mathcal{B}$ on X:n kanta.

$\mathcal{A}$ on Y:n esikanta mistä seuraa, että jos $\emptyset \neq U$ ja U on avoin Y:ssä niin $U = \bigcup\limits_{j\in J} \bigcap\limits_{k\in K_j} A_{jk}$, missä J on jokin indeksijoukko, K_j on äärellinen joukko kullakin $j \in J$ ja $A_{jk} \in \mathcal{A}$ kaikilla $j \in J$ ja $k \in K_j$. Koska f^{-1} kommutoi yhdisteen ja leikkauksen kanssa niin $f^{-1}U = \bigcup\limits_{j\in J} \bigcap\limits_{k\in K_j} f^{-1}A_{jk}$ eli kaikki topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ epätyhjät avoimet joukot voidaan antaa $f^{-1}A_{jk}$:iden avulla eli ne muodostavat X:n esikannan. $\square$

Tehtävä 4:2: Olkoon $\mathcal{T}$ kuvauksen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, tavallisesta topologiasta indusoima topologia. Mikä on yksiön $\{0\}$ sulkeuma $\mathcal{T}$:n suhteen?

Ratkaisu:

$\{0\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ on suljettu $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:ssa eli $\{0\} = \overline{\{0\}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$:ssa.

Lause 4.5(2):

$\overline{\{0\}} = f^{-1}[\overline{f\{0\}}] = f^{-1}\overline{\{0\}} = f^{-1}\{0\} = \{\pi n \in \mathbb{R} \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. □

Tehtävä 4:3: Määritä joukot clB^2, intB^2, extB^2 ja ∂B^2 tason $\mathbb{R}^2$ topologiassa, jonka indusoi projektio $pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Maalissa $\mathbb{R}$ on tavallinen topologia.

Ratkaisu:

$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < 1\}$.

$pr_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, pr_1(x,y) = x$.

$pr_1^{-1}\{-1,1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -1 \text{ tai } x = 1, y \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}B^2 = pr_1^{-1}[\overline{pr_1 B^2}] &= pr_1^{-1}[\overline{(-1,1)}] \\
&= pr_1^{-1}[-1,1] \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [-1,1], y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{ext}B^2 = \complement\mathrm{cl}B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (-\infty,-1) \text{ tai } x \in (1,\infty), y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}(\complement B^2) = pr_1^{-1}[\overline{pr_1 \complement B^2}] &= pr_1^{-1}[\overline{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)}] \\
&= pr_1^{-1}[\overline{\complement(-1,1)}] \\
&= pr_1^{-1}[\complement(-1,1)] \\
&= \complement pr_1^{-1}(-1,1) \\
&= \complement pr_1^{-1}[[-1,1] \setminus \{-1,1\}] = \complement\mathrm{cl}B^2 \cup pr_1^{-1}\{-1,1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}B^2 = \complement(\mathrm{cl}\complement B^2) &= \mathrm{cl}B^2 \cap \complement pr_1^{-1}\{-1,1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (-1,1), y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial B^2 = \mathrm{cl}B^2 \cap \complement\mathrm{int}B^2 &= \mathrm{cl}B^2 \cap (\complement\mathrm{cl}B^2 \cup pr_1^{-1}\{-1,1\}) \\
&= \mathrm{cl}B^2 \cap pr_1^{-1}\{-1,1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = -1 \text{ tai } x = 1, y \in \mathbb{R}\}. \ \square
\end{aligned}$$

Tehtävä 4:4: Olkoon X:ssä kuvauksen $f : X \to Y$ indusoima topologia. Osoita, että f määrittelee avoimen kuvauksen $f_1 : X \to fX$.