Topologia

Tehtävät 5:1-5:8

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 5:1: Todista Lause 5.10.

Ratkaisu:

Lause 5.9(1) $\Rightarrow E = A \cap F$ jollekin F, joka on suljettu X:ssä. Tästä seuraa heti, että kahden suljetun joukon leikkauksena E on suljettu X:ssä. $\square$

Tehtävä 5:2: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Todista, että seuraavat määritelmät A:n diskreettiydelle ovat yhtäpitävät:
(1) Jokainen A:n piste on A:n erakkopiste.
(2) Relatiivitopologia $\mathcal{T}|A$ on diskreetti, ts. $\mathcal{T}|A = \mathcal{P}(A)$.

Ratkaisu:

Oletetaan (1):

Olkoon $x \in A$ ja V x:n ympäristö (eli avoin X:ssä) s.e. $V \cap A = \{x\}$. Siis $\{x\} = V \cap A$ jollakin $V \in \mathcal{T}$, joten $\{x\} \in \mathcal{T}|A$. Siis myös $\mathcal{T}|A = \mathcal{P}(A)$.

Oletetaan (2):

Olkoon $x \in A$, jolloin $\{x\} \in \mathcal{P}(A) = \mathcal{T}|A$. $\mathcal{T}|A$:n määritelmän mukaan $\exists V \in \mathcal{T}$ s.e. $\{x\} = A \cap V$ eli erakkopisteen määritelmän mukaan x on A:n erakkopiste.

$\therefore$ (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\square$

Tehtävä 5:3: Avaruuden X osajoukko A on *lokaalisti suljettu*, jos jokaisella pisteellä $a \in A$ on sellainen ympäristö U, että $A \cap U$ on suljettu U:ssa. Todista, että A on lokaalisti suljettu, jos ja vain jos A on avoimen ja suljetun joukon leikkaus.

Ratkaisu:

Olkoon A lokaalisti suljettu ja $a \in A$. Siis $\exists U$, joka on avoin X:ssä, s.e. U on a:n ympäristö ja $A \cap U$ on suljettu U:ssa. Lause 5.9(1) nojalla $\exists F$, joka on suljettu X:ssä, s.e. $A \cap U = U \cap F$. Koska $a \in A, U$ niin $a \in A \cap U = U \cap F$. Siis $A \subset U \cap F$. Olkoon $b \in U \cap F = A \cap U \Rightarrow b \in A \Rightarrow U \cap F \subset A$. Siis $A = U \cap F$ eli A on avoimen ja suljetun joukon leikkaus.
Edeltävä kappale pätee käsittääkseni vain tapauksessa, jossa $A = \{a\}$ eli A on yksiö.

Olkoon A avoimen ja suljetun joukon leikkaus X:ssä eli $A = U \cap F$, missä U on avoin ja F on suljettu X:ssä. Olkoon $a \in A = U \cap F \Rightarrow U$ on a:n eräs ympäristö. Lause 5.9(1) toiseen suuntaan $\Rightarrow A = U \cap F$ on suljettu U:ssa. Kahden relatiivitopologiassa $\mathcal{T}|U$ suljetun joukon leikkauksena $A \cap U$ on suljettu U:ssa. $\square$

Tehtävä 5:4: Olkoon $X = A \cup B$ ja $E \subset A \cap B$ sellainen joukko, että E on avoin A:ssa ja B:ssä. Osoita, että E on avoin X:ssä.

Ratkaisu:

$E \subset A \cap B \Rightarrow E \subset A, B$.

Lause 5.3 $\Rightarrow \exists U, V \subset X$, jossa U ja V ovat avoimia X:ssä, s.e.
$E = A \cap U = B \cap V$.

$U = X \cap U = (A \cap U) \cup (B \cap U) = E \cup (B \cap U) \Rightarrow U \cap V =$
$(E \cap V) \cup (E \cap U) = E \cap (U \cup V)$.

Siis $U \cap V \subset E = E \cap E = A \cap B \cap U \cap V \subset U \cap V \Rightarrow E = U \cap V$, mikä on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin X:ssä. $\square$

Tehtävä 5:5: Anna esimerkki avaruudesta X ja sellaisista joukoista $A, B, E \subset X$, että $X = A \cup B$, $E \cap A$ on avoin A:ssa, $E \cap B$ on avoin B:ssä ja E ei ole avoin X:ssä.

Ratkaisu:

$X = \mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, \infty) = A \cup B$, missä $A = (-\infty, 0]$ ja $B = (0, \infty)$. Varustetaan $\mathbb{R}$ tavallisella topologialla $\mathcal{T}_{\text{tav}}$, jolloin $E = A$ ei ole avoin $\mathbb{R}$:ssä. Kuitenkin:

$E \cap A = A$ on avoin A:ssa ja $E \cap B = A \cap B = \emptyset$ on avoin B:ssä. $\square$

Tehtävä 5:6: Olkoon $A \subset B \subset X$, ja olkoon A tiheä B:ssä. Osoita, että A on tiheä joukossa $\overline{B}$.

Ratkaisu:

Nyt $A \subset B \subset \overline{B}$. Käytetään lausetta 5.9(2):

$\mathrm{cl}_B A = B \cap \overline{A} = B \Rightarrow \overline{B} = \overline{(B \cap \overline{A})} \subset \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cap \overline{A} = \mathrm{cl}_{\overline{B}} A$

$\mathrm{cl}_{\overline{B}} A = \overline{B} \cap \overline{A} \subset \overline{B}$

$\therefore\ \mathrm{cl}_{\overline{B}} A = \overline{B}$ eli A on tiheä joukossa $\overline{B}$. $\square$

Tehtävä 5:7: Olkoot $E, A \subset X$. Osoita, että $\partial_A(E \cap A) \subset A \cap \partial E$, missä ∂_A on reuna A:n relatiivitopologiassa. Anna esimerkki, jossa nämä joukot eivät ole samat.

Ratkaisu:

Nyt yleisessä topologisessa avaruudessa X pätee $\mathrm{cl}_X \complement X = \overline{\complement X} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, joten $\mathrm{cl}_A \complement A = \emptyset$. Myös $\mathrm{cl}_A \complement (A \cup E) \subset \mathrm{cl}_A \complement A = \emptyset$. Käytetään mm. lauseita 1.12(8),(9) ja 1.14(5):

$$\begin{aligned}
\partial_A(E \cap A) = \mathrm{cl}_A(E \cap A) \cap \mathrm{cl}_A \complement (E \cap A) &= \mathrm{cl}_A(E \cap A) \cap (\mathrm{cl}_A \complement E \cup \mathrm{cl}_A \complement A) \\
&= \mathrm{cl}_A(E \cap A) \cap \mathrm{cl}_A \complement E \\
&= A \cap \overline{(E \cap A)} \cap [\mathrm{cl}_A((A \cup \complement A) \cap \complement E)] \\
&= A \cap \overline{(E \cap A)} \cap [\mathrm{cl}_A(A \cap \complement E) \cup \mathrm{cl}_A(\complement A \cap \complement E)] \\
&= A \cap \overline{(E \cap A)} \cap [\mathrm{cl}_A(A \cap \complement E) \cup \mathrm{cl}_A(\complement (A \cup E)] \\
&= A \cap \overline{(E \cap A)} \cap A \cap \overline{A \cap \complement E} \\
&\subset A \cap \overline{E} \cap \overline{A} \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{\complement E} \\
&= A \cap \overline{E} \cap \overline{\complement E} \\
&= A \cap \partial E.
\end{aligned}$$

Valitaan $X = \mathbb{R}$ ja topologiaksi $\mathcal{T}_{\mathrm{tav}}$. Valitaan $A = \{0\}, E = (0,1)$, jolloin $\partial_A(E \cap A) = \partial_A \emptyset = \emptyset \neq \{0\} \cap (\{0\} \cup \{1\}) = \{0\}$. $\square$

Tehtävä 5:8: Osoita, että injektio $f : X \to Y$ on upotus, jos ja vain jos f indusoi X:n topologian.

Ratkaisu:

Oletetaan, että injektio $f : X \to Y$ on upotus.

Olkoon $\mathcal{T}$ X:n topologia ($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) ja $\mathcal{T}'$ Y:n topologia ($\mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(Y)$), joiden suhteen f on jatkuva. Merkitään $\mathcal{T}_{\text{ind}}$:llä f:n $\mathcal{T}'$:sta indusoimaa topologiaa ($\mathcal{T}_{\text{ind}} \subset \mathcal{P}(X)$).

Lause 4.2 $\Rightarrow \mathcal{T}_{\text{ind}} \subset \mathcal{T}$.

Olkoon $U \in \mathcal{T}$. Tällöin 5.16(3') mukaan fU on avoin fX:ssä eli lauseen 5.3 nojalla $\exists V \in \mathcal{T}'$ s.e. $fU = fX \cap V$. Aina pätee $U \subset f^{-1}fU$ ja koska f on injektio niin myös $f^{-1}fU \subset U$ eli
$U = f^{-1}fU = f^{-1}fX \cap f^{-1}V = X \cap f^{-1}V = f^{-1}V \in \mathcal{T}_{\text{ind}}$.

$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{ind}}$.

Oletetaan sitten, että injektio $f : X \to Y$ indusoi X:n topologian eli $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{ind}}$.

f on injektio $\Rightarrow f_1 : X \to fX$ on bijektio.

Lauseesta 4.3 seuraa, että f_1 on homeomorfismi indusoidun topologian $\mathcal{T}_{\text{ind}} = \mathcal{T}$ suhteen, mistä seuraa että f on upotus. $\square$