Topologia

Tehtävät 5:9-5:13

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 5:9: Osoita, että upotuksista yhdistetty kuvaus on upotus.

Ratkaisu:

Olkoon $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}')$ ja $(Z,\mathcal{T}'')$ topologisia avaruuksia ja kuvaukset $f:X\to Y$ ja $g:Y\to Z$ upotuksia.

Osoitetaan ensiksi, että $(g\circ f)_1=g_1\circ f_1$, jolloin $(g\circ f)_1^{-1}=f_1^{-1}\circ g_1^{-1}$. Merkitään $y=f(x)$, kun $x\in X$.

$(g_1\circ f_1)(x)=g_1(f_1(x))=g_1(f(x))=g_1(y)=g(y)=(g\circ f)(x)=$
$(g\circ f)_1(x)\ \ \forall x\in X$.

$\Rightarrow (g\circ f)_1=g_1\circ f_1$.

$\Rightarrow (g\circ f)_1^{-1}=(g_1\circ f_1)^{-1}=f_1^{-1}\circ g_1^{-1}$.

$$\begin{aligned}(1):(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))\\ &\Rightarrow f(x_1)=f(x_2),\text{ koska } g \text{ on injektio.}\\ &\Rightarrow x_1=x_2,\text{ koska } f \text{ on injektio.}\\ &\Rightarrow g\circ f \text{ on injektio.}\end{aligned}$$

(2): Kohta 3.6.1 $\Rightarrow g\circ f$ on jatkuva.

(3): $f_1^{-1}:fX\to X$ ja $g_1^{-1}:gY\to Y$ ovat jatkuvia bijektioita, joten kohdan 3.6.1 nojalla $(g\circ f)_1^{-1}=f_1^{-1}\circ g_1^{-1}$ on jatkuva.

$\therefore g\circ f$ on upotus. $\square$

Tehtävä 5:10: Olkoon $f : X \to Y$ sellainen jatkuva avoin kuvaus, että jokaisella X:n pisteellä on ympäristö, johon rajoitettuna f on injektio. Osoita, että f on immersio.

Ratkaisu:

Olkoon $x \in U$, missä U on x:n ympäristö, johon rajoitettuna f on injektio.

(1) Tehtävänannon mukaan $f|U$ on injektio.

(2) Lauseen 5.12 nojalla $f|U$ on jatkuva.

(3') Olkoon $V \Subset X$.

Nyt $(f|U)V = f(U \cap V) \subset fU = (f|U)X$. Siis $(f|U)V = (f|U)X \cap f(U \cap V)$, missä $f(U \cap V) \Subset Y$, koska f on avoin kuvaus ja $U \cap V \Subset X$. Lauseen 5.3 nojalla $(f|U)V \Subset (f|U)X$ eli (3') toteutuu.

$\therefore$ $f|U$ on upotus eli f on immersio. $\square$

Tehtävä 5:11: Olkoon $f : X \approx Y$ ja $A \subset X$. Osoita, että f:n määrittelemä kuvaus $f_1 : A \to fA$ on homeomorfismi.

Ratkaisu:

(1): f on injektio joten f_1 on myös injektio ja koska f_1 on myös surjektio, se on bijektio.

(2) Kirjan kohdasta 5.14 seuraa, että f_1 on jatkuva.

(3) Nyt $f_1^{-1} : fA \to A$ ja $f_1 A = fA$. Olkoon $V \Subset A \subset X$. Siis lauseen 5.3 nojalla $\exists W \Subset X$ s.e. $V = A \cap W$. Tästä saadaan
$(f_1^{-1})^{-1} V = (f_1^{-1})^{-1} A \cap (f_1^{-1})^{-1} W = fA \cap (f_1^{-1})^{-1} W$ ja kohdan (5.b) nojalla (aseta $f_1^{-1} = f^{-1}|fA$ ja sovella kaavaa)
$(f_1^{-1})^{-1} V = fA \cap (fA \cap fW) = fA \cap fW$. Nyt $fW \Subset Y$, koska f on avoin (tai f^{-1} on jatkuva), joten taas lauseen 5.3 nojalla (toiseen suuntaan) $(f_1^{-1})^{-1} V \Subset fA$. Siis f_1^{-1} on jatkuva kuvaus.

$\therefore$ f_1 on homeomorfismi. $\square$

Tehtävä 5:12: Merkitään $X \prec Y$, jos avaruus X voidaan upottaa avaruuteen Y. Anna esimerkki, jossa $X \prec Y \prec X$, mutta $X \not\approx Y$. *Vihje.* Eräs esimerkki saadaan väleistä.

Ratkaisu:

Bolzanon lause: Jos funktio h on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja sen arvot tämän välin päätepisteissä ovat erimerkkiset, niin sillä on välillä $]a, b[$ nollakohta.

Väitetään, että voidaan valita $X = [-1, 1]$ ja $Y = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Jos $h : (X, \mathcal{T}_{\text{tav}}|X) \approx (Y, \mathcal{T}_{\text{tav}}|Y)$ on homeomorfismi, niin se on jatkuva bijektio $[-1, 1] \to [-1, 1] \setminus \{0\}$. Koska h saa Bolzanon lauseen nojalla jollakin $x \in]-1, 1[$ arvon $h(x) = 0$, on tämä ristiriita sen kanssa, että maalijoukko on $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

$\therefore [-1, 1] \not\approx [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Olkoon funktiot $f : [-1, 1] \to [-1, 1] \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ ja $g : [-1, 1] \setminus \{0\} \to [-1, 1], g(x) = x$.

Nyt $f[-1, 1] = [-1, -\frac{1}{2}]$ ja $g([-1, 1] \setminus \{0\}) = [-1, 1] \setminus \{0\}$. Määritellään korajoittumat:

$$f_1 : [-1, 1] \to [-1, -\frac{1}{2}], f_1(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}, f_1^{-1}(y) = 4y + 3$$
$$g_1 : [-1, 1] \setminus \{0\} \to [-1, 1] \setminus \{0\}, g_1(x) = x, g_1^{-1}(y) = y.$$

Selvästi f_1 ja g_1 ovat bijektioita ja jatkuvia ((ε, δ)- tarkastelu). Myös f_1^{-1} ja g_1^{-1} ovat jatkuvia, joten f_1 ja g_1 ovat homeomorfismeja.

$\therefore X \prec Y \prec X$, mutta $X \not\approx Y$. $\square$

Tehtävä 5:13: Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva avoin kuvaus, $A \subset X$ ja $f_1 : A \to fA$ f:n määrittelemä kuvaus.
(a) Anna esimerkki, jossa f_1 ei ole avoin.
(b) Osoita, että jos $A = f^{-1}B$ jollakin $B \subset Y$, niin f_1 on avoin.