Topologia

Tehtävät 6:1-6:7

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 6:1: Täydennä 6.5:n todistus. *Ohje.* Sovella lauseen ehtoa kuvaukseen $id : X \to X$ valitsemalla X:lle sopivia topologioita.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}'$ X:n topologioita, joilla on lauseen 6.5 ominaisuus. Nyt:

$id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ on jatkuva $\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$,
$id^{-1} : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ on jatkuva $\Leftrightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ (tietysti id on bijektio, joten sillä on käänteisfunktio).

Sovelletaan lauseen ominaisuutta merkitsemällä $g = id$:

$f_j \circ id : (X, \mathcal{T}) \to (Y_j, \mathcal{T}_j')$ on jatkuva $\forall j \in J \Leftrightarrow id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ on jatkuva $\Leftrightarrow \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Sovelletaan lauseen ominaisuutta uudelleen merkitsemällä $g = id^{-1}$:

$f_j \circ id^{-1} : (X, \mathcal{T}') \to (Y_j, \mathcal{T}_j')$ on jatkuva $\forall j \in J \Leftrightarrow id^{-1} : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ on jatkuva $\Leftrightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Koska $f_j \circ id$ ja $f_j \circ id^{-1}$ ovat molemmat jatkuvia indusoitujen topologioiden $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}'$ suhteen (niillähän molemmilla oli lauseen ominaisuus) $\forall j \in J$, saadaan $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ $\square$

Tehtävä 6:2: Täydennä 6.8:n todistus.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{T}$ kuvausperheen $(f_j)_{j\in J}$ indusoima topologia X:ssä. Merkitään $\mathcal{A}' = \{f_j^{-1}A : \ A \in \mathcal{A}_j \text{ ja } j \in J\}$. Olkoon $U \in \mathcal{T}$. Lauseen 6.8 mukaan $\mathcal{B} = \{\bigcap_{j\in K} f_j^{-1}B_j : B_j \in \mathcal{B}_j \text{ ja } K \subset J \text{ on äärellinen}\}$ on $(X, \mathcal{T})$:n kanta. Siis:

$U = \bigcup_{w\in W} \bigcap_{j\in K_w} f_j^{-1}B_{jw}$ jollakin indeksijoukolla W, missä K_w on äärellinen joukko, ja $B_{jw} \in \mathcal{B}_j$, kullakin $j \in J$ ja $w \in W$. Koska kukin $B_{jw} = \bigcap_{z\in Z} A_{jwz}$, missä Z on äärellinen joukko ja $A_{jwz} \in \mathcal{A}_j$ $\forall j \in J, \forall w \in W$ ja $\forall z \in Z$, ja alkukuva kommutoi leikkauksen kanssa, niin:

$U = \bigcup_{w\in W} \bigcap_{j\in K_w} \bigcap_{z\in Z} f_j^{-1}A_{jwz}$.

$\therefore \mathcal{A}'$ on $(X, \mathcal{T})$:n eräs esikanta. $\square$

Tehtävä 6:3: Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaukset $f(x) = x$ ja $g(x) = -x$. Osoita, että parin (f, g) topologiasta $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ indusoima $\mathbb{R}$:n topologia on diskreetti.

Ratkaisu:

$f, g : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$

$\mathcal{T}_{\text{pa}}$:n kanta $\mathcal{B}_{\text{pa}} = \{[a, b[: \ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Nyt siis:

$f^{-1}[a, b[= [a, b[$,
$g^{-1}[a, b[=]-b, -a]$, kun $a < b$.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Lauseen 6.8 nojalla
$f^{-1}[x, x+1[\cap g^{-1}[-x, -x+1[= [x, x+1[\cap]x-1, x] = \{x\}$ on indusoidun topologian $\mathcal{T}$ kanta-alkio eli $\{x\} \circledcirc \mathbb{R}$. Siis $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. $\square$

Tehtävä 6:4: Olkoon joukossa X perheen $(f_j)_{j\in J}$ indusoima topologia, missä $f_j : X \to Y_j$ ja Y_j:t ovat Hausdorffin avaruuksia. Osoita, että X on Hausdorff, jos ja vain jos jokaista paria $x, y \in X$ kohti, jolla $x \neq y$, on olemassa sellainen $j \in J$, että $f_j(x) \neq f_j(y)$.

Ratkaisu:

Olkoon X Hausdorff, $x, y \in X$ ja $x \neq y$. Tehdään vasta-oletus:
$\forall j \in J : f_j(x) = f_j(y)$ ja päätellään ristiriita.

Olkoon $\forall j \in J$ $W_j \Subset Y_j$ ja W_j $f_j(x)$:n (ja $f_j(y)$:n) ympäristö. Jokaisella topologialla on kanta (topologia esim. on itse oma kantansa) ja lauseen 2.4 nojalla $\exists B_j \in \mathcal{B}_j$, missä $\mathcal{B}_j$ on Y_j:n kanta, s.e. $f_j(x) \in B_j \subset W_j$ $\forall j \in J$.

Siis $x \in f_j^{-1}B_j$ $\forall j \in J \Rightarrow x \in \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j$. Samoin $y \in \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j$.

Olkoon $U, V \Subset X$ ja U x:n ympäristö ja V y:n ympäristö. Koska X on Hausdorff niin voidaan olettaa, että $U \cap V = \emptyset$.

Lauseiden 2.5 ja 6.8 nojalla $x \in \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j \subset U$ ja $y \in \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j \subset V$. Koska siis $\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j \subset U, V$ niin $\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j \subset U \cap V$. Siis:

$x \in \bigcap_{j\in J} f_j^{-1}B_j \subset U \cap V = \emptyset$, mikä on ristiriita.

Olkoon $x, y \in X, x \neq y$ ja $j \in J$ sellainen, että $f_j(x) \neq f_j(y)$.

Y_j on Hausdorff, joten valitaan ympäristöt U ja V s.e. $f_j(x) \in U \Subset Y_j$ ja $f_j(y) \in V \Subset Y_j$, mutta $U \cap V = \emptyset$.

Siis $x \in f_j^{-1}U$ ja $y \in f_j^{-1}V$ ja f_j:n jatkuvuuden nojalla nämä ovat avoimia X:ssä.

$f_j^{-1}U \cap f_j^{-1}V = f_j^{-1}(U \cap V) = f_j^{-1}\emptyset = \emptyset$, joten x:llä ja y:llä on erilliset ympäristöt ja siis X on Hausdorff. $\square$

Tehtävä 6:5: Olkoon $\mathbb{R}$:ssä parin (f, g) indusoima topologia, kun $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja maalissa $\mathbb{R}$ on tavallinen topologia. Onko tämä topologia Hausdorff, kun $f(x) = x^2$ ja (a) $g(x) = -x^2$, (b) $g(x) = (x-1)^2$?

Ratkaisu:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}})$ on Hausdorff, joten voidaan soveltaa edellistä tehtävää 6:4.

(a) $1 \neq -1$, mutta

$$\begin{cases} (-1)^2 = 1^2 \\ -(-1)^2 = -1^2, \end{cases}$$

joten topologia ei ole Hausdorff.

(b) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x \neq y$.

$$\begin{cases} (x-1)^2 = (y-1)^2 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x-1+y-1)(x-1-y+1) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x+y-2)\cancel{(x-y)} = 0 \\ (x+y)\cancel{(x-y)} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y = 2 \\ x+y = 0, \end{cases}$$

mikä on mahdotonta. Siis topologia on Hausdorff. $\square$

Tehtävä 6:6: Olkoon X joukko ja Y avaruus. Mikä on kaikkien vakiokuvausten $f : X \to Y$ indusoima X:n topologia?

Ratkaisu:

$(f_a)_{a \in Y}$ on kuvausperhe, missä $f_a : X \to Y$, $f_a(x) = a$ ja $a \in Y$ on vakio. Alikannaksi saadaan:

$\mathcal{A} = \{f_a^{-1}V : V \mathrel{\overset{\circ}{\subset}} Y, a \in Y\} = \{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_{\text{mini}}$. $\square$

Tehtävä 6:7: Olkoon X avaruus. Osoita, että kaikkien jatkuvien kuvausten $f : X \to X$ kokoelma indusoi X:ään sen alkuperäisen topologian.

Ratkaisu:

$(X, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus. Olkoon $\mathcal{T}'$ kaikkien jatkuvien kuvausten $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ kokoelman indusoima topologia.

Lauseen 6.3 mukaan $\mathcal{T}'$ on karkein X:n topologia, joiden suhteen jokainen f on jatkuva, joten $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Nyt siis myös kaikki $f : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$, joille $f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ on jatkuva, ovat jatkuvia.

Olkoon $id : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ identiteettikuvaus. Tämä identiteettikuvaus on jatkuva, jos ja vain jos $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Koska $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ kuuluu kaikkien $(X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$:lle jatkuvien kuvausten kokoelmaan, niin myös $id : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ on jatkuva ja siis $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Saadaan siis lopulta $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\square$