Topologia

Tehtävät 7:0-7:7

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 7:0: Todista, että kohdan 7.18 kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva suoraan jatkuvuuden määritelmän avulla.

Ratkaisu:

Olkoon $a \in X$ ja $V \Subset \mathbb{R}$ $f(a)$:n ympäristö. Koska $\{]a, b[\ :\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ on $\mathbb{R}$:n kanta, lauseen 2.5 nojalla $\exists \varepsilon > 0$ s.e. $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[\subset V$.

Siis jos $\forall \varepsilon > 0$ löydetään $U \Subset X$, missä U on a:n ympäristö s.e. $fU \subset]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ niin f on jatkuva pisteessä a.

Olkoon nyt siis $\varepsilon > 0$. Koska $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 3^{-j} = \frac{1}{2}$ niin valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ s.e.

$|\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} 3^{-j}| = |\sum\limits_{j=1}^{n} 3^{-j} - \frac{1}{2}| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n_0$.

Merkitään $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n_0} pr_j^{-1}\{a_j\}$. Koska Y:ssä ($X = Y^{\mathbb{N}}$) on diskreetti topologia, niin $\{a_j\} \Subset Y$ ja siis $U \Subset X$. Lisäksi selvästi $a \in U$, joten U on siis a:n ympäristö. Nyt jos $x \in U$ niin:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x)| = 2|\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j}(a_j - x_j)| &= 2|\sum_{j=n_0+1}^{\infty} 3^{-j}(a_j - x_j)| \\ &\leq 2 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} 3^{-j}|(a_j - x_j)| \\ &\leq 2 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} 3^{-j} \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\therefore$ $fU \subset]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ eli f on jatkuva a:ssa. Koska a oli mielivaltaisesti valittu, niin f on jatkuva X:ssä. $\square$

Tehtävä 7:1: Todista, että kohdassa 7.18 määritelty kuvaus $\psi : I \to I^2$ on jatkuva.

Ratkaisu:

Kirjassa todistettiin, että funktio $\varphi = (g \times g) \circ h \circ f_1^{-1} : C \to I^2$ on jatkuva surjektio. Lähdössä topologia $\mathcal{T}_{\text{tav}}|C$ ja maalissa $\mathcal{T}_{\text{tav},\mathbb{R}^2}|I^2$, missä $\mathcal{T}_{\text{tav}}$ on $\mathbb{R}$:n tavallinen topologia ja $\mathcal{T}_{\text{tav},\mathbb{R}^2}$ on $\mathbb{R}^2$:n tavallinen topologia.

Määritellään $\psi : I \to I^2$ kuten kirjassa (lähdössä topologia $\mathcal{T}_{\text{tav}}|I$ ja maalissa $\mathcal{T}_{\text{tav},\mathbb{R}^2}|I^2$).

Jos ψ on jatkuva tavallisen normin $x \mapsto \|x\|_{\text{tav}}$ suhteen niin se on jatkuva normin määrittelemän metriikan suhteen ja siis jatkuva metriikan määräämän relatiivitopologian suhteen. Riittää siis tehdä (ε, δ)-tarkastelu ja todistaa, että $\psi|I \setminus C$ on jatkuva tavallisen normin suhteen.

Olkoon siis $\varepsilon > 0$ ja $x \in I \setminus C$. Siis $\exists a, b \in C, a < b$ s.e. $x \in]a, b[$.

Tapaus 1: $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{\|\varphi(a)-\varphi(b)\|_{\text{tav}}}, b - a\}$. Nyt jos $y \in]a, b[$ ja $|x - y| < \delta$ niin joillakin $t_x, t_y \in [0, 1]$ pätee $x = (1 - t_x)a + t_x b$ ja $y = (1 - t_y)a + t_y b$ ja saadaan:

$$\begin{aligned}
\|\psi(x) - \psi(y)\|_{\text{tav}} &= \|\psi((1 - t_x)a + t_x b) - \psi((1 - t_y)a + t_y b)\|_{\text{tav}} \\
&= \|(1 - t_x)\varphi(a) + t_x\varphi(b) - (1 - t_y)\varphi(a) - t_y\varphi(b))\|_{\text{tav}} \\
&= |t_y - t_x| \cdot \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_{\text{tav}} \\
&= |x - y| \cdot \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_{\text{tav}} \\
&< \frac{\varepsilon}{\|\varphi(a) - \varphi(b)\|_{\text{tav}}} \cdot \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_{\text{tav}} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Sillä jos $b - a \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi(a)-\varphi(b)\|_{\text{tav}}} \Rightarrow (b - a) \cdot \|\varphi(a) - \varphi(b)\|_{\text{tav}} \leq \varepsilon$).

Tapaus 2: $\varphi(a) = \varphi(b)$. Valitaan $\delta = b - a$. Nyt jos jos $y \in]a, b[$ niin $|x - y| < \delta$ ja saadaan $\|\psi(x) - \psi(y)\|_{\text{tav}} = 0 < \varepsilon$.

$\therefore$ ψ on jatkuva. $\square$

Tehtävä 7:2: Todista Lauseen 7.14 kohta (2).

Ratkaisu:

Jos $\prod_{j\in J} \overline{A}_j = \emptyset$ niin $\overline{A} = \emptyset$ (katso todistuksen loppu: $A \subset \prod_{j\in J} \overline{A}_j$).

Olkoon $x \in \prod_{j\in J} \overline{A}_j$ ja $U \Subset X$ x:n ympäristö.

X:llä on kanta, jonka jäsenet ovat muotoa $B = \prod_{j\in J} V_j$, missä $V_j \Subset X_j$ kaikilla $j \in J$ ja lisäksi $V_j = X_j$, kun $j \in J \setminus K$, missä K on jokin äärellinen $K \subset J$ joukko.

Lause 2.5 $\Rightarrow x \in \prod_{j\in J} V_j \subset U$, jossa $\prod_{j\in J} V_j$ on kannan jokin jäsen ja $V_j \Subset X_j$.

Koska $pr_j(x) \in V_j \Subset X_j$ kaikilla $j \in J$ niin sulkeuman määritelmän 1.10 nojalla $V_j \cap A_j \neq \emptyset$ kaikilla $j \in J$. Valitaan $y \in X$ s.e. $pr_j(y) \in V_j \cap A_j$ kaikilla $j \in J$. Saadaan:

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(V_j \cap A_j) &= \prod_{j\in J}(V_j \cap A_j) \\ &\subset^{(*)} \prod_{j\in J} V_j \cap \prod_{j\in J} A_j \\ &\subset U \cap \prod_{j\in J} A_j. \end{aligned}$$

(Sillä yleisesti (*): $V_j \cap A_j \subset V_j$ ja $V_j \cap A_j \subset A_j$ kaikilla $j \in J \Rightarrow$
$\prod_{j\in J}(V_j \cap A_j) \subset \prod_{j\in J} V_j$ ja $\prod_{j\in J}(V_j \cap A_j) \subset \prod_{j\in J} A_j \Rightarrow$
$\prod_{j\in J}(V_j \cap A_j) \subset \prod_{j\in J} V_j \cap \prod_{j\in J} A_j$).

Siis $U \cap \prod_{j\in J} A_j \neq \emptyset$, joten $x \in \overline{A}$.

$\therefore \prod_{j\in J} \overline{A}_j \subset \overline{A}$.

Selvästi $\prod_{j\in J} \overline{A}_j$ on suljettu ja koska $A_j \subset \overline{A}_j$ kaikilla $j \in J$ niin $A \subset \prod_{j\in J} \overline{A}_j$.
Lauseen 1.12(3) nojalla siis $\overline{A} \subset \prod_{j\in J} \overline{A}_j$.

$\therefore \overline{A} = \prod_{j\in J} \overline{A}_j$. $\square$

Tehtävä 7:3: Olkoot X, Y ja Z avaruuksia. Todista, että
$X \times Y \times Z \approx (X \times Y) \times Z$.

Ratkaisu:

Olkoon $h : X \times Y \times Z \to (X \times Y) \times Z, h = (id \times id) \times id$ eli $h(x, y, z) = ((x, y), z)$. Kirjan sivun 50 mukaan $id \times id$ on jatkuva, koska id on jatkuva. Siis myös $h = (id \times id) \times id$ on jatkuva.

Injektiivisyys:

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1, z_1) = h(x_2, y_2, z_2) &\Rightarrow ((x_1, y_1), z_1) = ((x_2, y_2), z_2) \\ &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ ja } z_1 = z_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ ja } z_1 = z_2 \\ &\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \\ &\Rightarrow \text{h on injektio.} \end{aligned}$$

Surjektiivisuus:
Olkoon $x = ((a, b), c) \in (X \times Y) \times Z$. Tällöin $h(a, b, c) = x$, joten h on surjektio.

$\therefore$ h on jatkuva bijektio ja selvästi $h^{-1}((x, y), z) = (x, y, z)$.

h^{-1} komponenttikuvaukset ovat:
$(h_1^{-1})((x, y), z) = (pr_1 \circ h^{-1})((x, y), z) = x = pr_1(x, y, z)$,
$(h_2^{-1})((x, y), z) = (pr_2 \circ h^{-1})((x, y), z) = y = pr_2(x, y, z)$,
$(h_3^{-1})((x, y), z) = (pr_3 \circ h^{-1})((x, y), z) = z = pr_3(x, y, z)$,
ja ne ovat jatkuvia sillä projektiot pr_j ovat jatkuvia, kun $j = 1, 2, 3$. Siis taas sivun 50 nojalla h^{-1} on jatkuva.

$\therefore$ $X \times Y \times Z \approx (X \times Y) \times Z$. $\square$

Tehtävä 7:4: Formuloi ja todista edellisen tehtävän yleistys tapaukseen, jossa $X = \prod_{j \in J} X_j$ ja on annettu J:n ositus $J = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$ erillisiksi osajoukoiksi.

Ratkaisu:

Väite: Olkoon A ositusjoukko ja $J = \bigcup\limits_{\alpha \in A} K_\alpha$ J:n ositus erillisiksi osajoukoiksi. Olkoon X_j avaruus kaikilla $j \in J$ ja $X = \prod\limits_{j \in J} X_j$ tuloavaruus. Tällöin $X \approx \prod\limits_{\alpha \in A} (\prod\limits_{j \in K_\alpha} X_j)$.

Todistus: Olkoon $h : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} (\prod\limits_{j \in K_\alpha} X_j), h = \prod\limits_{\alpha \in A} (\prod\limits_{j \in K_\alpha} id)$.

Lause 7.10 $\Rightarrow \prod\limits_{j \in K_\alpha} id$ on jatkuva $\forall \alpha \in A \Rightarrow h$ on jatkuva.

Merkitään $X_\alpha = \prod\limits_{j \in K_\alpha} X_j$ ja $g_{K_\alpha} = \prod\limits_{j \in K_\alpha} id : X_\alpha \to X_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$. Tällöin voimme kirjoittaa $h : X \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha, h = \prod\limits_{\alpha \in A} g_{K_\alpha}$ ja saamme projektiot:
$pr'_\alpha : \prod\limits_{\beta \in A} X_\beta \to X_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$,
$pr_\alpha : X \to X_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$,
$pr_j : X_\alpha \to X_j$ kaikilla $j \in K_\alpha$,
$pr'_j = pr_j$ kaikilla $j \in J$.

Näille funktioille ja projektioille saadaan suoraan tulokuvauksen määritelmästä:

$pr'_\alpha \circ h = g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha$ kaikilla $\alpha \in A$ ja $pr'_j \circ g_{K_\alpha} = id \circ pr_j$ kaikilla $j \in K_\alpha$.

Injektiivisyys:

$$
\begin{aligned}
& h(x_1) = h(x_2) \\
\Rightarrow\ & (pr'_\alpha \circ h)(x_1) = (pr'_\alpha \circ h)(x_2) \ \ \forall \alpha \in A \\
\Rightarrow\ & (g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha)(x_1) = (g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha)(x_2) \ \ \forall \alpha \in A \\
\Rightarrow\ & (pr'_j \circ g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha)(x_1) = (pr'_j \circ g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha)(x_2) \ \ \forall \alpha \in A,\ \forall j \in K_\alpha \\
\Rightarrow\ & (id \circ pr_j \circ pr_\alpha)(x_1) = (id \circ pr_j \circ pr_\alpha)(x_2) \ \ \forall \alpha \in A,\ \forall j \in K_\alpha \\
\Rightarrow\ & (pr_j \circ pr_\alpha)(x_1) = (pr_j \circ pr_\alpha)(x_2) \ \ \forall \alpha \in A,\ \forall j \in K_\alpha \\
\Rightarrow\ & x_1 = x_2 \\
\Rightarrow\ & \text{h on injektio.}
\end{aligned}
$$

Surjektiivisuus: Olkoon $x' \in \prod_{\alpha\in A}(\prod_{j\in K_\alpha} X_j)$. Tällöin valitsemalla $x \in X$ s.e. $(pr_j \circ pr_\alpha)(x) = (pr'_j \circ pr'_\alpha)(x') \;\; \forall\alpha \in A,\; \forall j \in K_\alpha$ saadaan:

$$\begin{aligned}
(pr'_j \circ pr'_\alpha \circ h)(x) &= (pr'_j \circ g_{K_\alpha} \circ pr_\alpha)(x) \\
&= (id \circ pr_j \circ pr_\alpha)(x) \\
&= (pr_j \circ pr_\alpha)(x) \\
&= (pr'_j \circ pr'_\alpha)(x') \;\; \forall\alpha \in A,\; \forall j \in K_\alpha \\
&\Rightarrow (pr'_j \circ pr'_\alpha \circ h)(x) = (pr'_j \circ pr'_\alpha)(x') \;\; \forall\alpha \in A,\; \forall j \in K_\alpha \\
&\Rightarrow h(x) = x' \\
&\Rightarrow \text{h on surjektio.}
\end{aligned}$$

$\therefore h$ on jatkuva bijektio.

$h^{-1} : \prod_{\alpha\in A}(\prod_{j\in K_\alpha} X_j) \to X, h^{-1} = \prod_{j\in J} id$ ja koska komponenttikuvaukset $h_j^{-1} = (pr_j \circ pr_\alpha) \circ h^{-1} = id \circ pr'_j \circ pr'_\alpha$, missä $id : X_j \to X_j$, ovat jatkuvia $\forall\alpha \in A,\; \forall j \in K_\alpha$ niin h^{-1} on jatkuva.

$\therefore \prod_{j\in J} X_j \approx \prod_{\alpha\in A}(\prod_{j\in K_\alpha} X_j)$.

Tehtävän 7:3 tapaus saadaan, kun valitaan $J = \{1, 2, 3\}$, avaruudet $X_1 = X, X_2 = Y, X_3 = Z$, ja ositus $A = \{1, 2\}, K_1 = \{1, 2\}$ ja $K_2 = \{3\}$. $\square$

Tehtävä 7:5: Olkoon X tuloavaruus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Olkoon $A \subset X$ kaikkien äärellisten joukkojen karakterististen funktioiden joukko.
(a) Osoita, että vakiofunktio g, $g(x) = 1$, kuuluu A:n sulkeumaan.
(b) Osoita, ettei mikään A:n jono suppene kohti g:tä.
(c) Päättele, ettei X ole metristyvä.
(d) Konstruoi epäjatkuva kuvaus $F : A \cup \{g\} \to \mathbb{R}$, jolla $F(x_n) \to F(x)$ aina, kun $x_n \to x$ joukossa $A \cup \{g\}$.

Ratkaisu:

Karakteristinen funktio joukossa $B \subset X$ on
$\chi_B : X \to \mathbb{R}, \chi_B = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \notin B \\ 1, & \text{kun } x \in B \end{cases}$

(a) Olkoon $U \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ g:n ympäristö.

Lause 7.6 $(g \in U) \Rightarrow pr_j U = \mathbb{R}$ lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä $j \in \mathbb{R}$. Olkoon K nyt tämä äärellinen indeksijoukko (kuten lauseessa 7.6): $K \subset \mathbb{R}$.

Koska $g \in U$ niin $1 \in pr_j U$ kaikilla $j \in K$. Selvästi $0 \in \mathbb{R}$. Siis $\chi_K \in U$ eli $U \cap A \neq \emptyset$. Siis $g \in \overline{A}$.

(b) Olkoon (x_n) jono A:ssa s.e. $x_n \to g$. Lause 7.13 nojalla $pr_j(x_n) = x(j)_n \to pr_j(g) = 1$, kun $n \to \infty$ kaikilla $j \in \mathbb{R}$.

Olkoon $n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x(j)_{n_0} > 0$ kaikilla $j \in \mathbb{R}$. Koska $\mathbb{R}$ ei ole äärellinen joukko, niin $x_{n_0} \notin A$, mikä on ristiriita.

$\therefore$ Ei ole olemassa A:n jonoa (x_n) s.e. $x_n \to g$.
(c) Metrisistä avaruuksista tiedetään, että metrisessä avaruudessa $\overline{A}$ on A:n pisteiden suppenevien jonojen raja-arvojen joukko. Koska (b)-kohdan nojalla ei ole suppenevaa A:n jonoa, joka suppenee kohti $g \in \overline{A}$ niin X ei voi olla metrinen avaruus.
(d) Määritellään $F : A \cup \{g\} \to \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = g \\ 1, & \text{kun } x \in A \end{cases}$.

Siis $F = \chi_A$ (katso tehtävä 3:2). Nyt $g \in \complement A \subset \overline{\complement A}$ ja koska $g \in \overline{A}$ niin $g \in \overline{A} \cap \overline{\complement A} = \partial A$. Siis tehtävän 3:2 nojalla F on epäjatkuva g:ssä.

Jos $x_n \to x \in A$ niin F:n jatkuvuudesta pisteessä x seuraa $F(x_n) \to F(x)$.

(b)-kohdan nojalla, jos $x_n \to g$ niin ei ole olemassa (x_n):n osajonoa A:ssa. Jos olisi, niin tämä osajono suppenisi kohti g:tä, mikä on mahdotonta. Siis $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.e. $x_n = g \;\; \forall n \geq n_0$ ja siis $F(x_n) = 0 \to F(g) = 0$. $\square$

Tehtävä 7:6: Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva. Osoita, että f:n *kuvaaja*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\} \subset X \times Y$$

on homeomorfinen X:n kanssa.

Ratkaisu:

Merkitään $h = id \times f : X \to \Gamma(f), h(x) = (x, f(x))$.

id ja f ovat jatkuvia $\Rightarrow$ h on jatkuva.

Injektiivisyys:
$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow h$ on injektio.

Surjektiivisuus:
Olkoon $a \in \Gamma(f) \Rightarrow a = (a', f(a'))$ jollakin $a' \in X \Rightarrow h(a') = a$ jollakin $a' \in X$ eli h on surjektio.

$\therefore$ h on jatkuva bijektio.

$h^{-1} : \Gamma(f) \to X, h^{-1}(x, f(x)) = x = pr_1(x, f(x))$ on projektiona jatkuva.

$\therefore$ h on homeomorfismi ja siis $\Gamma(f) \approx X$. $\square$

Tehtävä 7:7: Olkoon X tuloavaruus $\prod_{j\in J} X_j$. Olkoon $a \in X, k \in J$, ja olkoon A ns. X_k:n *a-liuska*

$$A = \{x \in X \ : \ x_j = a_j, \text{ kun } j \neq k\}.$$

Osoita, että $A \approx X_k$.

Ratkaisu:

Olkoon $h : A \to X_k, h = pr_k \circ i = pr_k|A$, missä i on inkluusio $A \hookrightarrow X$.

pr_k on jatkuva, joten lauseen 5.12 nojalla $h = pr_k|A$ on jatkuva. Selvästi h on bijektio.

$\therefore$ h on jatkuva bijektio.

$$h^{-1} : X_k \to A, h^{-1}(y) = \begin{cases} x_j = a_j, & \text{kun } j \neq k \\ x_j = y, & \text{kun } j = k \end{cases}$$

Nyt h^{-1}:n komponenttikuvaukset ovat

$$h_j^{-1} = pr_j \circ h^{-1} : X_k \to X_j, h_j^{-1}(y) = \begin{cases} a_j, & \text{kun } j \neq k \\ y, & \text{kun } j = k \end{cases}$$

Siis komponenttikuvaukset ovat

$$h_j^{-1} = \begin{cases} \text{vakiofunktio } h_j^{-1}(y) = a_j, & \text{kun } j \neq k \\ id, & \text{kun } j = k \end{cases}$$

Lauseen 7.10 nojalla h^{-1} on jatkuva, koska komponenttikuvaukset h_j^{-1} ovat jatkuvia kaikilla $j \in J$.

$\therefore$ h on homeomorfismi ja $A \approx X_k$. $\square$