Topologia

Tehtävät 7:8-7:15

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2005 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 7:8: Avaruus X on *nollaulotteinen*, jos sillä on kanta, jonka jäsenet ovat suljettuja, ts. niiden reuna on tyhjä. Osoita, että $\mathbb{Q}$ ja jokainen diskreetti avaruus ovat nollaulotteisia. Osoita, että nollaulotteisten avaruuksien mielivaltainen tulo on nollaulotteinen. Päättele tämän avulla, että Cantorin joukko on nollaulotteinen (minkä voi myös todistaa suoraan reaaliakselilla).

Ratkaisu:

Olkoon $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s.e. $a < b$. $\{]c, d[\ : \ c, d \in \mathbb{R}, c < d\}$ on $\mathbb{R}$:n tavallisen topologian $\mathcal{T}_{\text{tav}}$ kanta. Nyt:

$U = \mathbb{Q} \cap]a, b[= \mathbb{Q} \cap [a, b]$,

joten lauseiden 5.3 ja 5.9(1) nojalla U on avoin ja suljettu $\mathbb{Q}$:ssa. Joukko $\{\mathbb{Q} \cap]c, d[\ : \ c, d \in \mathbb{R}, c < d\}$ on lauseen 5.7 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}}|\mathbb{Q}$:n kanta. Olkoon $\mathcal{B} = \{\mathbb{Q} \cap]c, d[\ : \ c, d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, c < d\}$. Nyt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\text{tav}}|\mathbb{Q}$. Jos $x \in U \in \mathcal{T}_{\text{tav}}|\mathbb{Q}$ niin voidaan valita sellainen $\mathbb{Q} \cap]c, d[$, missä $c, d \in \mathbb{R}, c < d$, että $x \in \mathbb{Q} \cap]c, d[\subset U$ (lauseen 2.4 nojalla). Valitsemalla nyt $B = \mathbb{Q} \cap]c', d'[\in \mathcal{B}$, missä $c', d' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, c < c' < x < d' < d$ saadaan $x \in B \subset \mathbb{Q} \cap]c, d[\subset U$, joten lauseen 2.4 nojalla $\mathcal{B}$ on $\mathbb{Q}$:n kanta, jonka jäsenet ovat suljettuja. $\mathbb{Q}$ on siis nollaulotteinen.

Olkoon X diskreetti avaruus ja $U \Subset X$. Myös $X \setminus U \Subset X$, mistä seuraa, että $\complement(X \setminus U) = \complement X \cup U = \emptyset \cup U = U$ on suljettu X:ssä. Lauseen 2.4 nojalla $\{U \subset X \ : \ U \Subset X\}$ on X:n topologian kanta, jonka jäsenet ovat suljettuja, joten X on nollaulotteinen.

Olkoon $X = \prod_{j \in J} X_j$ tuloavaruus, jossa kussakin nollaulotteisessa X_j:ssä on annettu kanta $\mathcal{B}_j$, jonka jäsenet ovat suljettuja. Lauseen 7.11 nojalla leikkaukset:

$B = \bigcap_{j \in K} pr_j^{-1} B_j$,

missä $B_j \in \mathcal{B}_j$ ja $K \subset J$ on äärellinen, muodostavat X:n kannan. Koska B_j on suljettu X_j:ssä kaikilla $j \in J$ niin lauseiden 3.3(3) ja 1.8(2) nojalla B on suljettu X:ssä. Siis X on nollaulotteinen.

$\therefore$ Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko $C = Y^{\mathbb{N}}$, missä Y on diskreetti avaruus, on nollaulotteinen. $\square$

Tehtävä 7:9: Todista: Olkoon $X = \prod_{j \in J} X_j$, ja olkoon A_j tiheä joukko X_j:ssä jokaisella indeksillä j. Osoita, että joukkojen A_j tulo on tiheä X:ssä

Ratkaisu:

$\overline{A}_j = X_j \;\; \forall j \in J$, joten lauseen 7.14(2) nojalla ($A = \prod_{j \in J} A_j$):

$\overline{A} = \prod_{j \in J} \overline{A}_j = \prod_{j \in J} X_j = X$, eli A on tiheä X:ssä. $\square$

Tehtävä 7:10: Olkoot $A_1 \subset X_1$ ja $A_2 \subset X_2$, jolloin $A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$.
Osoita, että:
$\partial(A_1 \times A_2) = (\partial A_1 \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \partial A_2)$,
$\mathrm{int}(A_1 \times A_2) = (\mathrm{int}A_1) \times (\mathrm{int}A_2)$.

Ratkaisu:

$pr_1^{-1}\overline{A}_1 = \overline{A}_1 \times X_2 = \overline{A_1 \times X_2} = \overline{pr_1^{-1}A_1}$ ja
$pr_2^{-1}\overline{A}_2 = X_1 \times \overline{A}_2 = \overline{X_1 \times A_2} = \overline{pr_2^{-1}A_2}$.

$A_1 \times A_2 = pr_1^{-1}A_1 \cap pr_2^{-1}A_2 \Rightarrow \overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 = pr_1^{-1}\overline{A}_1 \cap pr_2^{-1}\overline{A}_2$.

$\complement(A_1 \times A_2) = pr_1^{-1}\complement A_1 \cup pr_2^{-1}\complement A_2 \Rightarrow \overline{\complement(A_1 \times A_2)} = \overline{pr_1^{-1}\complement A_1} \cup \overline{pr_2^{-1}\complement A_2} =$
$pr_1^{-1}\overline{\complement A_1} \cup pr_2^{-1}\overline{\complement A_2}$.

Siis:

$\partial(A_1 \times A_2) = \overline{(A_1 \times A_2)} \cap \overline{\complement(A_1 \times A_2)} =$
$(pr_1^{-1}\overline{A}_1 \cap pr_2^{-1}\overline{A}_2) \cap (pr_1^{-1}\overline{\complement A_1} \cup pr_2^{-1}\overline{\complement A_2}) =$
$[pr_1^{-1}(\overline{A}_1 \cap \overline{\complement A_1}) \cap pr_2^{-1}\overline{A}_2] \cup [pr_1^{-1}\overline{A}_1 \cap pr_2^{-1}(\overline{A}_2 \cap \overline{\complement A_2})] = (\partial A_1 \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \partial A_2)$

$\mathrm{int}(A_1 \times A_2) = \complement\overline{\complement(A_1 \times A_2)} = pr_1^{-1}\complement\overline{\complement A_1} \cap pr_2^{-1}\complement\overline{\complement A_2} = (\mathrm{int}A_1) \times (\mathrm{int}A_2)$. $\square$

Tehtävä 7:11: Olkoot $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltaisia funktioita, $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ja $F : X \to X$ yhtälön $F(x)(t) = g(t)x(h(t))$ määrittelemä kuvaus. Osoita, että F on jatkuva tulotopologiassa. *Apu.* 7.10.

Ratkaisu:

F:n komponenttikuvaukset $F_t : X \to \mathbb{R}, F_t(x) = (pr_t \circ F)(x) = g(t)x(h(t))$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Koska $F_t(x) = g(t) \cdot pr_{h(t)}(x)$ niin $F_t = G_t \cdot pr_{h(t)}$, missä $G_t : X \to \mathbb{R}, G_t(x) = g(t)$.

G_t on vakiokuvauksena jatkuva tulotopologiassa X kuten myös projektio $pr_{h(t)}$. Näiden tulo F_t on siis myös jatkuva kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten lauseen 7.10 nojalla F on jatkuva. $\square$

Tehtävä 7:12: Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ heikko topologia (6.4.2) on sama kuin sen tavallinen topologia. *Vihje.* Projektiot $pr_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia. *Huomautus.* Tulos ei riipu $\mathbb{R}^n$:n normista, koska nämä ovat keskenään ekvivalentteja.

Ratkaisu:

$\mathbb{R}^n$:n heikko topologia $\mathcal{T}_w$ on kaikkien rajoitettujen lineaarikuvausten $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ indusoima topologia. Kun $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $j \in \{1, \dots, n\}$ saadaan:

$pr_j(\lambda x + \mu y) = \lambda x_j + \mu y_j = \lambda pr_j(x) + \mu pr_j(y).$

Lisäksi $\|pr_j(x)\|_{\mathbb{R}} = \|x_j\|_{\mathbb{R}} \leq 1 \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$ eli pr_j on rajoitettu lineaarikuvaus.

Kaikki rajoitetut lineaarikuvaukset f ovat jatkuvia paitsi indusoimassaan topologiassa $\mathcal{T}_w$ niin myös tavallisessa topologiassa $\mathcal{T}_{\text{tav}}$. Siis lauseen 6.3 nojalla $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_{\text{tav}}$.

Projektiot taas indusoivat tavallisen topologian $\mathcal{T}_{\text{tav}}$ ja, koska ne ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia, niin ne ovat myös jatkuvia heikossa topologiassa $\mathcal{T}_w$. Siis taas lauseen 6.3 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}_w$.

$\therefore \mathcal{T}_w = \mathcal{T}_{\text{tav}}$. $\square$

Tehtävä 7:13: Olkoon $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ varustettuna laatikkotopologialla, jonka kantana ovat avointen joukkojen $U_j \Subset \mathbb{R}$ tulot $U_1 \times U_2 \times \dots$. Olkoon $A \subset X$ rajoitettujen jonojen joukko. Osoita, että A on avoin ja suljettu.

Ratkaisu:

Jono (a_n) on rajoitettu, jos $\exists M \in [0, \infty[$ s.e. $|a_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Selvästi jono (0_n), eli $0_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, on rajoitettu ja jos löytyy $M \in [0, \infty[$ s.e. $|a_n| \leq M$ niin löytyy $M' \in]0, \infty[$ s.e. $|a_n| < M'$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Voidaan siis sanoa, että jono on rajoitettu, jos $\exists M \in]0, \infty[$ s.e. $|a_n| < M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $a \in A$ ja $\mathcal{B}$ laatikkotopologian tehtävänannossa annettu kanta. Nyt $\exists M \in]0, \infty[$ s.e. $a \in]-M, M[\times]-M, M[\times \dots \in \mathcal{B}$. Koska kaikki $]-M, M[\times]-M, M[\times \dots$:n alkiot ovat rajoitettuja jonoja, niin $a \in]-M, M[\times]-M, M[\times \dots \subset A$. Siis lauseen 2.5 nojalla A kuuluu laatikkotopologiaan eli A on avoin.

Jos $b \in \complement A$ niin $b \in]b_1 - 1, b_1 + 1[\times]b_2 - 1, b_2 + 1[\times \dots \subset \complement A$, joten saman lauseen 2.5 nojalla myös $\complement A$ on avoin eli A on suljettu laatikkotopologiassa. $\square$

Tehtävä 7:14: Onko edellisen tehtävän joukko A (a) avoin, (b) suljettu $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:n tulotopologiassa?

Ratkaisu:

(a) $pr_j A = \mathbb{R}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten lauseen 7.6 nojalla A ei ole avoin tuloavaruudessa.

(b) $pr_j \complement A = \mathbb{R}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten taas lauseen 7.6 nojalla $\complement A$ ei ole avoin tuloavaruudessa, joten A ei ole myöskään suljettu tuloavaruudessa. $\square$

Tehtävä 7:15: Todista kohdan 7.22 väite.

Ratkaisu:

Valinta-aksioma: $\prod\limits_{j \in J} X_j = \emptyset \Leftrightarrow \exists X_j, j \in J$ s.e. $X_j = \emptyset$.

$Y = \lim\limits_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{inv} X_A = \{x \in \prod\limits_{A \in \mathcal{A}} X_A \ : \ \varphi_{BA}(x_B) = x_A$ aina kun $A \leq B\}$, missä $\varphi_{BA} : B \hookrightarrow A$ (ja jossa $A \leq B \Leftrightarrow B \subset A$) ja $x_A = pr_A(x) \ \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Jos $\prod\limits_{A \in \mathcal{A}} X_A = \emptyset \Rightarrow Y = \emptyset = \bigcap \mathcal{A}$, joten jatkossa oletetaan, että $\prod\limits_{A \in \mathcal{A}} X_A \neq \emptyset$ eli $X_A \neq \emptyset \ \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Olkoon $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. Haluamme osoittaa, että $Y = \emptyset$. Tehdään vastaoletus: $\exists a \in Y$. Siis $a_B = a_A$ aina kun $A \leq B$. Olkoon siis $A, B \in \mathcal{A}$. Koska $(\mathcal{A}, \leq)$ on suunnattu joukko niin $\exists \lambda \in \mathcal{A}$ s.e. $A \leq \lambda$ ja $B \leq \lambda$. Siis $a_A = a_\lambda = a_B$, joten a:n kaikki koordinaatit ovat samat. Saadaan
$a' = pr_A(a) \in X_A \ \ \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow a' \in \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $Y = \emptyset$.

Jatkossa voidaan siis olettaa, että $X_A \neq \emptyset \ \ \forall A \in \mathcal{A}$ ja myös että $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Osoitetaan, että $h : \bigcap \mathcal{A} \to Y, h(x) = (x)_{A \in \mathcal{A}}$ on homeomorfismi.

Injektiivisyys: Olkoon $x, y \in \bigcap \mathcal{A}$ ja $h(x) = h(y)$. Siis
$(x)_{A \in \mathcal{A}} = (y)_{A \in \mathcal{A}} \Rightarrow pr_A(x) = x = pr_A(y) = y$ (kaikilla $A \in \mathcal{A}$) eli $x = y$.

Surjektiivisuus: Olkoon $x' \in Y$ ja $x'_A = pr_A(x') \ \ \forall A \in \mathcal{A}$. Siis aina kun $A \leq B$ pätee $\varphi_{BA}(x'_B) = x'_B = x'_A$. Jos $A, B \in \mathcal{A}$ niin kuten edellä (suuntauksen määritelmä 3.15(3)) $\exists C \in \mathcal{A}$ s.e. $A \leq C$ ja $B \leq C$. Siis $x'_A = x'_C = x'_B$. Voidaan siis valita $x = pr_A(x') \ \ \forall A \in \mathcal{A}$, jolloin $h(x) = x'$.

$\therefore$ h on bijektio.

$h_A(x) = (pr_A \circ h)(x) = x$ eli $h_A = id : \bigcap \mathcal{A} \to \bigcap \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}$, joten h on lauseen 6.5 (tai kirjan sivun 50) nojalla jatkuva.

$h^{-1} : Y \to \bigcap \mathcal{A}, h^{-1}(y) = pr_A(y)$, missä $A \in \mathcal{A}$.

Tässä siis on rajoitettu projektion $pr_A : \prod\limits_{A \in \mathcal{A}} X_A \to X_A$ lähtö Y:hyn, jolloin saadaan jatkuva (kanoninen) kuvaus $\pi_A = pr_A|Y : Y \to X_A$, ja maali pienennetty $\bigcap \mathcal{A}$:han, koska $\bigcap \mathcal{A} \subset X_A$. Kirjan lauseen 5.15 nojalla (lauseessa sijoitetaan $f \mapsto \pi_A$ [tässä siis $h^{-1}(x) = \pi_A(x)$ kaikilla $x \in Y$ ja $h^{-1}Y = \bigcap \mathcal{A}$], $B \mapsto \bigcap \mathcal{A}$ ja $f_1 \mapsto h^{-1}$) h^{-1} on jatkuva, koska kuvaukset π_A ovat jatkuvia.

$\therefore \lim\limits_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{inv} X_A \approx \bigcap \mathcal{A}$. $\square$