

Topologia

Tehtävät 8:1-8:6

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 8:1: Täydennä Lauseen 8.5 todistus. *Ohje.* Sovella lauseen ehtoa kuvaukseen $id : Y \rightarrow Y$ valitsemalla Y :lle sopivia topologioita.

Ratkaisu:

Olkon $\mathcal{T}$ Y :n topologia, jolla on myös lauseen ominaisuus. Täytyy osoittaa, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Koska $id : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ on jatkuva ja $\mathcal{T}$:llä on lauseen ominaisuus, niin lauseen jo todistetun osan mukaan $id \circ f_j = f_j : X_j \rightarrow (Y, \mathcal{T})$ on jatkuva kaikilla $j \in J$.

Tarkastellaan sitten kuvausta $id : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$. Lauseen mukaan $id : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ on jatkuva jos ja vain jos $id \circ f_j = f_j : X_j \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ ovat jatkuvia kaikilla $j \in J$. Koska näin on niin $id : (Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ on jatkuva eli $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Lauseen 8.2 nojalla $\mathcal{T}'$ on hienoin niistä Y :n topologioista, joiden suhteen jokainen $f_j : X_j \rightarrow Y$ on jatkuva. Koska f_j :t ovat jatkuvia $\mathcal{T}$:n ja $\mathcal{T}'$:n suhteen niin $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\square$

Tehtävä 8:2: Todista Lauseen 8.7 kohta (3).

Ratkaisu:

$(g \circ f)X = g(fX) = gY = Z$, koska f ja g ovat surjektioita. Siis $g \circ f$ on surjektio.

$$V \subseteq Z \Leftrightarrow g^{-1}V \subseteq Y \Leftrightarrow f^{-1}g^{-1}V \subseteq X \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}V \subseteq X.$$

$\therefore g \circ f$ on samastuskuvaus. $\square$

Tehtävä 8:3: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ avaruus ja $\mathcal{A}$ kokoelma X :n osajoukkoja, joilla on relatiivitopologia. Inklusiot $j_A : A \hookrightarrow X$, jossa $A \in \mathcal{A}$, koindusoivat X :n topologian $\mathcal{T}'$.

- (a) Osoita, että $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
- (b) Osoita, että $\mathcal{T}|A = \mathcal{T}'|A$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$.
- (c) Anna esimerkki, jossa $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$.
- (d) Osoita, että $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, jos $X = \mathbb{R}^n$ ja $\mathcal{A}$ on kaikkien kompaktien osajoukkojen kokoelma.

Ratkaisu:

- (a) $j_A^{-1}V = A \cap V \subseteq A$ aina kun $V \in \mathcal{T}$ eli $j_A : (A, \mathcal{T}|A) \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ on jatkuva kaikilla $A \in \mathcal{A}$, mistä seuraa lauseen 8.2 nojalla, että $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
- (b) Olkoon nyt $U \in \mathcal{T}'|A \Rightarrow U = A \cap V$ jollakin $V \in \mathcal{T}$. (a)-kohdan nojalla $V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ eli $V \in \mathcal{T}'$. Siis $U \in \mathcal{T}'|A$.

Olkoon nyt $U \in \mathcal{T}'|A \Rightarrow U = A \cap V$ jollakin $V \in \mathcal{T}'$.

$$\mathcal{T}' = \{Z \subset X : j_B^{-1}Z \in \mathcal{T}|B \text{ kaikilla } B \in \mathcal{A}\}$$

Siis erityisesti, kun $B = A$ saadaan $U = j_A^{-1}V \in \mathcal{T}|A$.

$\therefore \mathcal{T}|A = \mathcal{T}'|A$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$.

- (c) $X = \{1, 2\}, \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}, \mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}, A = \{1\}, B = \{2\}$.

$$\begin{aligned} j_A^{-1}\{1\} &= \{1\}, & j_B^{-1}\{1\} &= \emptyset \\ j_A^{-1}\{2\} &= \emptyset, & j_B^{-1}\{2\} &= \{2\} \\ j_A^{-1}X &= \{1\}, & j_B^{-1}X &= \{2\} \\ \mathcal{T}|A &= \{\emptyset, \{1\}\}, & \mathcal{T}|B &= \{\emptyset, \{2\}\}. \end{aligned}$$

Siis $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ eli $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$.

- (d) (a)-kohdan nojalla $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, joten täytyy osoittaa vain, että $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Olkoon $U \in \mathcal{T}'$.

$j_A : (A, \mathcal{T}|A) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}')$ on jatkuva kaikilla $A \in \mathcal{A}$, joten kun maalin topologia $\mathcal{T}'$ korvataan karkeammalla topologialla $\mathcal{T}$ niin jatkuvuus säilyy. Siis:

$j_A : (A, \mathcal{T}|A) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ on jatkuva kaikilla $A \in \mathcal{A}$.

Lisäksi j_A on suljettu kuvaus lauseen 3.11 (tai 15.15) nojalla.

Olkoon $x \in \partial U$. Merkitään $A_i = B(x, \frac{1}{i})$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, jolloin $\overline{A_i} \in \mathcal{A}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Lauseen 8.4 nojalla $j_{\overline{A_i}}^{-1}\mathbb{C}U \subset (\overline{A_i}, \mathcal{T}|\overline{A_i})$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten koska $j_{\overline{A_i}}$ on suljettu kuvaus, niin:

$$j_{\overline{A_i}}(j_{\overline{A_i}}^{-1}\mathbb{C}U) = j_{\overline{A_i}}(\overline{A_i} \cap \mathbb{C}U) = \overline{A_i} \cap \mathbb{C}U \subset (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}) \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}.$$

Koska A_i on x :n ympäristö kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $x \in \partial U$ niin reunan määritelmän nojalla $A_i \cap \mathbb{C}U \neq \emptyset$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitaan siis jokaisella $i \in \mathbb{N}$ sellainen $x_i \in A_i \cap \mathbb{C}U$, että saadaan jono (x_i) , jolle $x_i \in A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi selvästi $x_i \rightarrow x$.

Koska $A_i \cap \mathbb{C}U \subset \overline{A_i} \cap \mathbb{C}U \subset \overline{A_1} \cap \mathbb{C}U$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ niin kyseinen suppeneva jono (x_i) on $\overline{A_1} \cap \mathbb{C}U$:ssa.

Kohdan 12.5.1 mukaan $\mathbb{R}^n$ on N_1 -avaruus, joten lauseen 12.8 nojalla $x \in \overline{A_1 \cap \mathbb{C}U} = \overline{A_1} \cap \mathbb{C}U$, joten $x \in \mathbb{C}U$. Siis $\partial U \subset \mathbb{C}U$. Saadaan:

$$\overline{\mathbb{C}U} = \mathbb{C}U \cup \partial \mathbb{C}U = \mathbb{C}U \cup \partial U = \mathbb{C}U \text{ eli } U \in \mathcal{T}.$$

$\therefore \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ eli $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. $\square$

Tehtävä 8:4: Olkoon X joukko ja $(A_j)_{j \in J}$ perhe X :n osajoukkoja. Olkoon kullakin indeksillä j annettu sellainen joukon A_j topologia $\mathcal{T}_j$, että $A_i \cap A_j \subseteq A_j$ ja $\mathcal{T}_i|_{A_i \cap A_j} = \mathcal{T}_j|_{A_i \cap A_j}$ kaikilla $i, j \in J$. Olkoon X :ssä inklusioiden $f_j : A_j \hookrightarrow X$ koindusoima topologia $\mathcal{T}$. Osoita, että (a) $\mathcal{T}|_{A_j} = \mathcal{T}_j$, (b) $A_j \subseteq X$.

Tehtävä 8:5: Olkoon X avaruus ja Y joukko. Mikä on kaikkien vakiokuvausten $f : X \rightarrow Y$ koindusoima Y :n topologia?

Ratkaisu:

Olkoon $(f_a)_{a \in Y}$ perhe vakiokuvauksia $f_a : X \rightarrow Y, f_a(x) = a$ ja $\mathcal{T}$ X :n topologia.

$$\mathcal{T}' = \{V \subset Y : f_a^{-1}V \in \mathcal{T} \text{ kaikilla } a \in Y\}$$

Olkoon $a \in Y$ ja $V \subset Y$. Jos $a \in V$ niin $f_a^{-1}V = X \in \mathcal{T}$ ja jos $a \notin V$ niin $f_a^{-1}V = \emptyset \in \mathcal{T}$. Siis aina kun $V \subset Y$ ja $a \in Y$ niin $f_a^{-1}V \in \mathcal{T}$, joten $\mathcal{T}'$ on diskreetti topologia. $\square$

Tehtävä 8:6: Olkoon X tulojoukon $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ koordinaattiakselien yhdiste eli niiden alkioiden x joukko, joilla $x_n \neq 0$ enintään yhdellä $n \in \mathbb{N}$. Kullakin $i \in \mathbb{N}$ määritellään kuvaus $f_i : \mathbb{R} \rightarrow X$ seuraavasti:

$$f_i(x)_j = \begin{cases} x, & \text{kun } j = i, \\ 0, & \text{kun } j \neq i. \end{cases}$$

Osoita, että kuvausten f_i $\mathbb{R}$:n tavallisesta topologiasta koindusoima X :n topologia on aidosti hienompi kuin X :n tuloavaruudesta $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ perimä relatiivitopologia.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{T}'$ f_i :den $\mathbb{R}$:n tavallisesta topologiasta $\mathcal{T}_{\text{tav}}$ koindusoima X :n topologia ja $\mathcal{T}$ tuloavaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tulotopologia. Selvästi $X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, joten voidaan tarkastella relatiivitopologiaa $\mathcal{T}|X$.

Koindusoinnista johtuen $f_i : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ ovat jatkuvia kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Merkitään $f_i^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f_i^*(x) = f_i(x)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, jolloin f_i on f_i^* :n määrittelemä kuvaus. Lisäksi olkoon $pr_j : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ projektio kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt:

$$(pr_j \circ f_i^*)(x) = f_i(x)_j \text{ kaikilla } i, j \in \mathbb{N}.$$

Jos $i = j$ niin $pr_j \circ f_i^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(pr_j \circ f_i^*)(x) = x$ eli $pr_j \circ f_i^* = id$ ja siis jatkuva.

Jos $i \neq j$ niin $pr_j \circ f_i^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(pr_j \circ f_i^*)(x) = 0$ eli vakiokuvaus ja siis jatkuva.

Siis $pr_j \circ f_i^*$ eli f_i^* :n komponenttikuvaukset ovat jatkuvia kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että f_i^* on jatkuva kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Koska $f_i^* \mathbb{R} \subset X \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ niin lauseen 5.15 nojalla myös $f_i : \mathbb{R} \rightarrow (X, \mathcal{T}|X)$ on jatkuva kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Lauseesta 8.2 seuraa nyt, että $\mathcal{T}|X \subset \mathcal{T}'$.

$$\text{Olkoon nyt } U = X \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N}} pr_j^{-1}(]-1, 1[).$$

$U \subset X$ on siis jokaiselta X :n koordinaattiakselilta otettujen $]-1, 1[$ -pätkien yhdiste. Saadaan:

$$f_i^{-1}U =]-1, 1[\in \mathcal{T}_{\text{tav}} \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}, \text{ mistä seuraa että } U \in \mathcal{T}'.$$

Tehdään vasta-oletus: $U \in \mathcal{T}|X$.

Lauseen 5.7 mukaan $\mathcal{T}|X$:n kanta-alkiot ovat muotoa $X \cap B$, missä B on $\mathcal{T}$:n kanta-alkio.

Kohdan 7.5(c) mukaan $\mathcal{T}$:n kanta-alkiot B ovat muotoa $B = \bigcap_{j \in K} pr_j^{-1}V_j$, missä $K \subset \mathbb{N}$ on äärellinen ja $V_j \subseteq \mathbb{R}$ kaikilla $j \in K$.

Merkitään $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in X$, jolloin selvästi $\bar{0} \in U$, joten lauseen 2.5 nojalla on olemassa $K \subset \mathbb{N}$, missä K on äärellinen, ja $V_j \subseteq \mathbb{R}$ kaikilla $j \in K$ s.e. $\bar{0} \in X \cap \bigcap_{j \in K} pr_j^{-1}V_j \subset U$ (*).

Siis $\bar{0} \in pr_j^{-1}V_j$ kaikilla $j \in K$. Koska projektiot ovat surjektioita niin $pr_j(\bar{0}) = 0 \in pr_j(pr_j^{-1}V_j) = V_j$ kaikilla $j \in K$.

Merkitään sitten $x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, missä alussa ennen 1:tä on $\max(K)$ kappaletta 0:ia. Selvästi $x \in X$. Myös $pr_j(x) = 0 \in V_j$ kaikilla $j \in K$, joten $x \in pr_j^{-1}V_j$ kaikilla $j \in K$. Siis $x \in \bigcap_{j \in K} pr_j^{-1}V_j$ eli

$x \in X \cap \bigcap_{j \in K} pr_j^{-1}V_j$. Kuitenkaan $x \notin U$, mikä on ristiriita (*):n kanssa. Siis $U \notin \mathcal{T}|X$.

$\therefore \mathcal{T}'$ on aidosti hienompi topologia kuin $\mathcal{T}|X$. $\square$