

Topologia

Tehtävät 8:7-8:11

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 8:7: Olkoon X avaruus. Osoita, että kaikkien jatkuvien kuvausten $f : X \rightarrow X$ kokoelma koindusoi X :ään sen alkuperäisen topologian.

Ratkaisu:

Olkoon $\mathcal{T}$ X :n topologia ja $\mathcal{T}'$ kaikkien jatkuvien kuvausten $f : X \rightarrow X$ kokoelman koindusoima topologia.

Lause 8.2 $\Rightarrow \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ myös kuvaus $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ on jatkuva. Koska $id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ on jatkuva kuvaus ja kuuluu siis kokoelmaan niin myös $id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$ on jatkuva. Siis $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T} = \mathcal{T}' \quad \square$

Tehtävä 8:8: Olkoon $\mathbb{R}^\infty$ niiden jonojen $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ joukko, joilla $x_j \neq 0$ vain äärellisellä määrällä indeksejä j . Kuvaukset $f_n : \mathbb{R}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, jossa $f_n(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ ja $n \in \mathbb{N}$, koindusoivat $\mathbb{R}^\infty$:ään topologian $\mathcal{T}'$. Vertaa tätä $\mathbb{R}^\mathbb{N}$:stä perittyyn relatiivitopologiaan. Tutki yksikkövektoreiden e_n muodostaman jonon suppenemista kummassakin topologiassa.

Ratkaisu:

Selvästi $\mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Merkitään $\mathbb{R}^\mathbb{N}$:n tulotopologiaa $\mathcal{T}$:llä, jolloin $\mathbb{R}^\mathbb{N}$:stä periytynyt relatiivitopologia on $\mathcal{T}|\mathbb{R}^\infty$. Olkoon $pr_j : \mathbb{R}^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ projektio kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olkoon $pr_{n,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ projektio kaikilla $1 \leq j \leq n$.

Merkitään $f_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $f_n^*(x) = f_n(x)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin f_n on f_n^* :n määrittelemä kuvaus. Nyt $f_n^*\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Lauseen 5.15 mukaan f_n on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos f_n^* on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten tutkitaan f_n^* :ien jatkuvuutta. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinnitetty.

Komponenttikuvaukset ovat:

$$(pr_j \circ f_n^*)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } j > n, \\ pr_{n,j}(x), & \text{kun } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Siis kun $j > n$ niin $pr_j \circ f_n^*$ on vakiokuvaus eli jatkuva ja kun $1 \leq j \leq n$ niin $pr_j \circ f_n^* = pr_{n,j}$ eli projektiokuvaus ja siis jatkuva. Lauseen 7.10 nojalla siis f_n^* on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten myös f_n on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 8.2 $\Rightarrow \mathcal{T}|\mathbb{R}^\infty \subset \mathcal{T}'$.

Selvästi $e_n \in \mathbb{R}^\infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja myös $\bar{0} = (0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Nyt $pr_j(e_n) = 0 = pr_j(\bar{0})$, kun $n \rightarrow \infty$, kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Siis lauseen 7.13 nojalla $e_n \rightarrow \bar{0}$ tuloavaruudessa $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Olkoon $\bar{0} \in U \in \mathcal{T}|\mathbb{R}^\infty$ eli U on $\bar{0}$:n ympäristö. Nyt $U = \mathbb{R}^\infty \cap V$, missä $V \in \mathcal{T}$. Koska $\bar{0} \in V$ niin V on $\bar{0}$:n ympäristö avaruudessa $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \mathcal{T})$. Koska $e_n \rightarrow \bar{0}$ niin jostakin $n_0 \in \mathbb{N}$ alkaen jonon (e_n) jäsenet ovat V :ssä eli $e_n \in V$, kun $n \geq n_0$. Siis $e_n \in U$, kun $n \geq n_0$. Voidaan siis sanoa, että jono (e_n) suppenee topologian $\mathcal{T}|\mathbb{R}^\infty$:n suhteen kohti $\bar{0}$:aa. Nyt:

$$f_n^{-1}\{e_i\} = \begin{cases} \{e_i\}, & \text{kun } i \leq n, \\ \emptyset, & \text{kun } i > n. \end{cases}$$

Merkitään $U_j = \mathbb{R}^\infty \setminus \bigcup_{i=1, i \neq j}^{\infty} \{e_i\} \subset \mathbb{R}^\infty$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

U_j on siis $\mathbb{R}^\infty$, josta on poistettu jonon (e_n) kaikki alkio paitsi j :s alkio e_j . Koska alkukuva kommutoi komplementin ja leikkauksen kanssa, saadaan:

$$\begin{aligned} f_n^{-1}U_j &= f_n^{-1}(\mathbb{R}^\infty \setminus \bigcup_{i=1, i \neq j}^{\infty} \{e_i\}) \\ &= f_n^{-1}\mathbb{R}^\infty \cap \bigcap_{i=1, i \neq j}^{\infty} \mathbb{C}_{f_n^{-1}\{e_i\}} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1, i \neq j}^n \{e_i\} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

kaikilla $n, j \in \mathbb{N}$.

Siis $U_j \in \mathcal{T}'$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Myös $e_j \in U_j$ eli U_j on e_j :n ympäristö kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Kuitenkaan U_j ei sisällä e_j :n lisäksi muita jonon (e_n) alkioita, joten (e_n) ei suppene mitään $\mathbb{R}^\infty$:n pistettä kohti. Voidaan siis sanoa, että jono (e_n) ei suppene topologian $\mathcal{T}'$ suhteen.

$\therefore \mathcal{T}'$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{T}|\mathbb{R}^\infty$. $\square$

Tehtävä 8:9: Olkoot X, Y, Z avaruuksia ja $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Todista:
Jos f on samastuskuvaus ja $g \circ f$ jatkuva, niin g on jatkuva.

Ratkaisu:

Olkoon $U \subseteq Z$.

$g \circ f$ on jatkuva $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}U = f^{-1}g^{-1}U \subseteq X$.

f on samastuskuvaus $\Rightarrow g^{-1}U \subseteq Y \Rightarrow g$ on jatkuva. $\square$

Tehtävä 8:10: Olkoot X, Y avaruuksia, $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow X$ jatkuvia ja $g \circ f = id$. Osoita, että f on upotus ja g samastuskuvaus.

Ratkaisu:

Olkoon $x, y \in X$ ja $f(x) = f(y) \Rightarrow (g \circ f)(x) = x = (g \circ f)(y) = y$ eli $x = y \Rightarrow f$ on injektio.

f :n määrittelemä kuvaus $f_1 : X \rightarrow fX, f_1(x) = f(x)$ on siis bijektio. Nyt jos $U \subset X$ niin:

$$g \circ f = g \circ f_1 = id \Rightarrow (g \circ f_1)^{-1}U = f_1^{-1}g^{-1}U = U.$$

Lisäksi:

$$f_1^{-1}(fX \cap g^{-1}U) = f_1^{-1}f_1X \cap f_1^{-1}g^{-1}U = U, \text{ joten jos } U \subseteq X \text{ niin:}$$

$$fU = f_1U = f_1f_1^{-1}(fX \cap g^{-1}U) = fX \cap g^{-1}U.$$

Koska g on jatkuva niin $g^{-1}U \subseteq Y \Rightarrow fU \subseteq fX$ eli f on upotus.

$(g \circ f)X = gfX = X \subset gY \subset X \Rightarrow gY = X$ eli g on surjektio.

" $\Rightarrow$ ": Olkoon $U \subseteq X$. Koska g on jatkuva niin $g^{-1}U \subseteq Y$.

" $\Leftarrow$ ": Olkoon $g^{-1}U \subseteq Y$. Koska f on jatkuva niin

$$f^{-1}g^{-1}U = (g \circ f)^{-1}U = U \subseteq X.$$

$\therefore g$ on samastuskuvaus. $\square$

Tehtävä 8:11: Muotoile ja todista transitiivisuuden 6.6 vastine koindusoinnille.

Ratkaisu:

Olkoon $(f_j)_{j \in J}$ perhe kuvauksia $f_j : Y_j \rightarrow Z$, missä Y_j :t ja Z ovat joukkoja. Olkoon lisäksi jokaista $j \in J$ kohti annettu perhe $(g_{jk})_{k \in K_j}$ kuvauksia $g_{jk} : X_{jk} \rightarrow Y_j$, missä $(X_{jk}, \mathcal{T}_{jk})$:t ovat avaruuksia. Tämä perhe koindusoi Y_j :hin topologian $\mathcal{T}'_j$, jolloin perhe $(f_j)_{j \in J}$ koindusoi näistä Z :n topologian $\mathcal{T}$. Tällöin $\mathcal{T}$ on sama kuin perheen $(f_j \circ g_{jk})_{j \in J, k \in K_j}$ koindusoima Z :n topologia $\mathcal{T}_1$.

$$X_{jk} \xrightarrow{g_{jk}} Y_j \xrightarrow{f_j} Z.$$

Todistus: Koska jokainen $f_j \circ g_{jk} : X_{jk} \rightarrow Z$ on yhdistettynä kuvauksena jatkuva topologiassa $\mathcal{T}$ niin $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$ (Lause 8.2). Käänteisen relaation $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ todistamiseksi riittää osoittaa, että jokainen $f_j : Y_j \rightarrow Z$ on jatkuva topologiassa $\mathcal{T}_1$. Kiinnitetään $j \in J$ ja käytetään lausetta 8.5.

Lause 8.5: Olkoon Y_j joukko ja $(g_{jk})_{k \in K_j}$ perhe kuvauksia $g_{jk} : X_{jk} \rightarrow Y_j$, jossa $(X_{jk}, \mathcal{T}_{jk})$ on topologinen avaruus kaikilla $k \in K_j$. Tällöin perheen $(g_{jk})_{k \in K_j}$ koindusoima topologia $\mathcal{T}'_j$ on ainoa Y_j :n topologia, jolla on seuraava ominaisuus:

Olkoon $(Z, \mathcal{T}_1)$ avaruus ja $f_j : Y_j \rightarrow Z$. Tällöin f_j on jatkuva, jos ja vain jos $f_j \circ g_{jk}$ on jatkuva kaikilla $k \in K_j$.

Tämä jälkimmäinen ehto toteutuu, joten f_j on jatkuva topologiassa $\mathcal{T}_1$. Kun lausetta sovelletaan jokaiseen $j \in J$ saadaan edellinen voimaan kaikilla $j \in J$. $\square$