

Topologia

Tehtävät 1:1-1:8

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 1:1: Olkoon X joukko ja $(\mathcal{T}_j)_{j \in J}$ perhe X :n topologioita. Osoita, että $\mathcal{T} = \bigcap \{\mathcal{T}_j : j \in J\}$ on myös X :n topologia.

Ratkaisu:

(T1) Olkoon $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, missä I on jokin indeksijoukko. Tällöin kaikilla $i \in I$ pätee että $U_i \in \mathcal{T}_j$, missä $j \in J$. Siis $\bigcup \{U_i : i \in I\} \in \mathcal{T}_j$, koska $\mathcal{T}_j$ on topologia ja toteuttaa ehdon (T1). Koska tämä toteutuu kaikilla $j \in J$ niin $\bigcup \{U_i : i \in I\} \in \bigcap \{\mathcal{T}_j : j \in J\} = \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Tällöin kaikilla $j \in J$ pätee että $U, V \in \mathcal{T}_j$, joten koska $\mathcal{T}_j$ on topologia ja toteuttaa ehdon (T2') niin $U \cap V \in \mathcal{T}_j$ kaikilla $j \in J$. Siis $U \cap V \in \bigcap \{\mathcal{T}_j : j \in J\} = \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}_j$ kaikilla $j \in J$, joten $\emptyset \in \bigcap \{\mathcal{T}_j : j \in J\} = \mathcal{T}$. Samoin $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X :n topologia. $\square$

Tehtävä 1:2: Osoita, että edellisen tehtävän vastine yhdisteille ei pidä paikkaansa.

Ratkaisu:

Olkoon $X = \{1, 2, 3\}$. Olkoon $\mathcal{T}_1 = \{\{1\}, \emptyset, X\}$ ja $\mathcal{T}_2 = \{\{2\}, \emptyset, X\}$. Selvästi $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat topologioita. Tällöin $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset, X\}$, mutta $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{T}$, joten (T1) ei toteudu.

$\therefore \mathcal{T}$ ei ole X :n topologia. $\square$

Tehtävä 1:3: Joukon X *kofiniitti topologia* sisältää $\emptyset$:n ja lisäksi ne joukot $U \subset X$, joiden komplementti $\mathbb{C}U$ on äärellinen. Osoita että tämä todella on X :n topologia ja että X on Hausdorff, jos ja vain jos X on äärellinen.

Ratkaisu:

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \#\mathbb{C}U < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$, ja myös $k \in J$ jokin indeksijoukon J alkio.

Tällöin $\#\mathbb{C}U_k < \infty$, joten De Morganin nojalla

$$\mathbb{C}\bigcup\{U_j : j \in J\} = \bigcap\{\mathbb{C}U_j : j \in J\} \subset \mathbb{C}U_k, \text{ mistä seuraa että}$$

$\bigcap\{\mathbb{C}U_j : j \in J\}$ on äärellinen, koska se on äärellisen joukon $\mathbb{C}U_k$ osajoukko.

Siis $\bigcup\{U_j : j \in J\} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Nyt De Morganin nojalla $\mathbb{C}(U \cap V) = \mathbb{C}U \cup \mathbb{C}V$.

Kahden äärellisen joukon yhdiste on äärellinen, joten $\mathbb{C}(U \cap V)$ on

äärellinen. Siis $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $\#\mathbb{C}X = \#\emptyset = 0 < \infty$, joten $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X :n topologia.

" $\Leftarrow$ " : Olkoon X äärellinen ja $x, y \in X, x \neq y$. Nyt $\mathbb{C}\{x\} = X \setminus \{x\}$ eli $\mathbb{C}\{x\}$ on äärellinen, joten $\{x\} \in \mathcal{T}$. Samoin $\{y\} \in \mathcal{T}$. Koska $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ja $\{x\}$ on x :n ympäristö ja $\{y\}$ on y :n ympäristö, X on Hausdorff.

" $\Rightarrow$ " : Olkoon X Hausdorff ja $x, y \in X, x \neq y$. Koska X on Hausdorff niin voidaan valita x :n ympäristö U ja y :n ympäristö V s.e. $U \cap V = \emptyset$. Nyt (T2') nojalla $U \cap V \in \mathcal{T}$ eli $\#\mathbb{C}(U \cap V) = \#\mathbb{C}\emptyset = \#X < \infty$. Siis X on äärellinen.

$\therefore X$ on Hausdorff, jos ja vain jos X on äärellinen. $\square$

Tehtävä 1:4: Todista, että esimerkin 1.2.8 kokoelma $\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia.

Ratkaisu:

$$\mathcal{T} = \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$. Jos jollakin $k \in J$, $U_k = \mathbb{R}$ niin $\bigcup \{U_j : j \in J\} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Voidaan siis olettaa, että $U_j \neq \mathbb{R}$ kaikilla $j \in J$. Jos jollakin $k \in J$, $U_k = \emptyset$ niin tämä tai nämä tyhjät jäsenet eivät vaikuta yhdisteeseen. Voidaan siis olettaa, että $U_j =]a_j, \infty[$, missä $a_j \in \mathbb{R}$ kaikilla $j \in J$. Merkitään $A = \{a_j : j \in J\}$. Saadaan kaksi tapausta:

Tapaus 1: $\inf A > -\infty$, jolloin

$$\bigcup \{U_j : j \in J\} = \bigcup \{]a_j, \infty[: j \in J\} =]\inf A, \infty[\in \mathcal{T}.$$

Tapaus 2: $\inf A = -\infty$, jolloin

$$\bigcup \{U_j : j \in J\} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}.$$

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Jos $U = \emptyset$ tai $V = \emptyset$ tai $U = \mathbb{R}$ tai $V = \mathbb{R}$ niin asia on selviö. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Nyt $]a, \infty[\cap]b, \infty[=]\max\{a, b\}, \infty[\in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia. $\square$

Tehtävä 1:5: Määritä yksiön $\{0\}$ sulkeuma edellisen tehtävän topologiassa.

Ratkaisu:

Selvästi $0 \in \{0\} \subset \overline{\{0\}}$ eli $0 \in \overline{\{0\}}$. Väitetään, että $\overline{\{0\}} =]-\infty, 0]$.

Tutkitaan, millä $x \in \mathbb{R}$ arvoilla $x \in \overline{\{0\}}$. Saadaan kaksi tapausta:

Tapaus 1: $x > 0$. Nyt $\{0\} \cap]\frac{x}{2}, \infty[= \emptyset$ ja $]\frac{x}{2}, \infty[$ on x :n ympäristö. Siis nyt $x \notin \overline{\{0\}}$.

Tapaus 2: $x < 0$. Olkoon U x :n ympäristö. Jos $U = \mathbb{R}$ niin $\{0\} \cap U \neq \emptyset$, joten oletetaan, että $U \neq \mathbb{R}$. Koska U on avoin, se on muotoa $U =]a, \infty[$, missä $a \in \mathbb{R}$. Koska U on x :n ympäristö niin $x \in]a, \infty[$, mistä seuraa, että $a < 0$. Nyt $\{0\} \cap]a, \infty[= \{0\} \neq \emptyset$, joten $x \in \overline{\{0\}}$. $\square$

Tehtävä 1:6: Todista Lause 1.8.

Ratkaisu:

Olkoon X topologinen avaruus.

(1) Olkoon $U_j \subset X$, $j \in J$, suljettu. Nyt De Morganin ja (T1):n nojalla $\mathbb{C}\bigcap\{U_j : j \in J\} = \bigcup\{\mathbb{C}U_j : j \in J\} \subseteq X$ koska $\mathbb{C}U_j$:t ovat avoimia kaikilla $j \in J$. Siis $\bigcap\{U_j : j \in J\}$ on suljettu.

(2) Olkoon $U_j \subset X$ suljettu kaikilla $j \in K$, missä K on äärellinen indeksijoukko. Nyt De Morganin ja (T2):n nojalla $\mathbb{C}\bigcup\{U_j : j \in K\} = \bigcap\{\mathbb{C}U_j : j \in K\} \subseteq X$, koska $\mathbb{C}U_j \subseteq X$ kaikilla $j \in K$. Siis $\bigcup\{U_j : j \in K\}$ on suljettu.

(3) $\mathbb{C}\emptyset = X$ ja $\mathbb{C}X = \emptyset$, joten $\emptyset$ ja X ovat suljettuja. $\square$

Tehtävä 1:7: Olkoon $\mathcal{T}$ niiden joukkojen $U \subset \mathbb{R}$ kokoelma, joilla $U = \emptyset$ tai $\mathbb{R} \setminus U$ on numeroituva. Osoita, että $\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia. Onko avaruus Hausdorff?

Ratkaisu:

$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R} : U = \emptyset \text{ tai } \mathbb{R} \setminus U \text{ on numeroituva}\}.$

(T1) Olkoon $U_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$, missä J on jokin indeksijoukko. Oletetaan, että $U_j \neq \emptyset$ kaikilla $j \in J$, sillä tyhjät joukot eivät vaikuta yhdisteeseen. Nyt $\mathbb{R} \setminus U_j$ on numeroituva kaikilla $j \in J$. Olkoon $k \in J$ jokin J :n alkio. De Morganin avulla saadaan $\mathbb{C} \bigcup \{U_j : j \in J\} = \bigcap \{\mathbb{R} \setminus U_j : j \in J\} \subset \mathbb{R} \setminus U_k$. $\mathbb{R} \setminus U_k$ on numeroituva, joten $\mathbb{R} \setminus \bigcup \{U_j : j \in J\}$ on numeroituvan joukon osajoukkona numeroituva. Siis $\bigcup \{U_j : j \in J\} \in \mathcal{T}$.

(T2') Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$ ja $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ numeroituvia. Tällöin De Morganin avulla $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$ ja tämä on numeroituva, koska $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ olivat numeroituvia. Siis $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $\#\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \#\emptyset = 0 < \infty$, joten $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n topologia.

Oletetaan, että avaruus on Hausdorff ja osoitetaan ristiriita. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ ja U x :n ympäristö ja V y :n ympäristö s.e. $U \cap V = \emptyset$. Nyt $U \cap V = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus U \cup \mathbb{R} \setminus V) = \emptyset$ mistä seuraa, että $(\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R}$ eli $\mathbb{R} \setminus U$ tai $\mathbb{R} \setminus V$ on ylinumeroituva. Tämä on ristiriita, sillä $\mathbb{R} \setminus U$ ja $\mathbb{R} \setminus V$ olivat numeroituvia. Siis $U \cap V \neq \emptyset$.

$\therefore (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ei ole Hausdorff. $\square$

Tehtävä 1:8: Olkoon X ääretön avaruus, jonka kaikki äärettömät osajoukot ovat avoimia. Osoita, että X on diskreetti.

Ratkaisu:

Olkoon $a \in X$ ja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono X :n pisteitä, jossa kaikki jonon jäsenet ovat eri suuruksia, eli $x_i \neq x_j$, aina kun $i \neq j$. Tällainen jono voidaan muodostaa, koska X oli ääretön.

Merkitään $U = \{a\} \cup \{x_{2i} : i \in \mathbb{N}\}$ ja $V = \{a\} \cup \{x_{2i-1} : i \in \mathbb{N}\}$ eli U sisältää a :n lisäksi jonon parilliset jäsenet ja V parittomat. Koska U ja V ovat äärettömiä X :n osajoukkoja niin ne ovat avoimia. Siis myös niiden leikkaus $U \cap V = \{a\}$ on avoin. Mikä tahansa $\mathcal{P}(X)$:n joukko W voidaan antaa muodossa $W = \bigcup \{\{a\} : a \in W\}$ eli W on avointen joukkojen yhdisteenä avoin.

$\therefore X$ on diskreetti. $\square$