

Topologia

Tehtävät 1:9-1:15

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 1:9: Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Todista:

(a) $\partial\partial A \subset \partial A$.

(b) Jos A on suljettu, niin $\partial\partial A = \partial A$.

(c) Aina $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

Osoita esimerkillä $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, että a-kohdassa ei aina päde yhtälö.

Ratkaisu:

(a) Lauseen 1.14(5) nojalla $\partial\partial A = \overline{\partial A} \setminus \text{int}\partial A \subset \partial A$.

(b) Halutaan edellisestä kohdasta $\text{int}\partial A = \mathbb{C}\overline{\partial A} = \mathbb{C}X = \emptyset$. Tämän osoittamiseksi tarkastellaan $\overline{\mathbb{C}\partial A}$:aa. Nyt:

$$\overline{\mathbb{C}\partial A} = \overline{\mathbb{C}(\bar{A} \cap \overline{\mathbb{C}A})} = \overline{(\mathbb{C}A \cup \overline{\mathbb{C}\bar{A}})} = \overline{\mathbb{C}A} \cup \overline{\overline{\mathbb{C}\bar{A}}} = \overline{\text{ext}A} \cup \overline{\text{int}A}.$$

Toisaalta:

$$\overline{\text{ext}A} = \overline{\mathbb{C}\bar{A}} = \overline{\mathbb{C}A} = \mathbb{C}\text{int}A, \text{ joten:}$$

$$X = \mathbb{C}\text{int}A \cup \text{int}A \subset \overline{\text{ext}A} \cup \overline{\text{int}A} = \overline{\mathbb{C}\partial A} \subset X \text{ eli } \overline{\mathbb{C}\partial A} = X. \text{ Siis } \partial\partial A = \partial A \setminus \text{int}\partial A = \partial A.$$

(c) ∂A on aina suljettu, joten (b)-kohdan nojalla $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

Olkoon $x \in \mathbb{Q}$ ja $U \subseteq \mathbb{R}$ x :n ympäristö. U sisältää välin $\Delta =]a, b[$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (katso esim. Lause 2.4). Välillä Δ on sekä $\mathbb{Q}$:n että $\mathbb{C}\mathbb{Q}$:n pisteitä, joten $\text{int}\mathbb{Q} = \text{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$ ja siis $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Lisäksi $\text{int}\mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, joten $\partial\partial\mathbb{Q} = \overline{\partial\mathbb{Q}} \setminus \text{int}\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$. Siis sisältyvyys $\partial\partial\mathbb{Q} \subset \partial\mathbb{Q}$ on aito. $\square$

Tehtävä 1:10: Olkoot A ja B avaruuden X erillisiä avoimia osajoukkoja. Osoita, että joukot $\text{int}\bar{A}$ ja $\text{int}\bar{B}$ ovat erillisiä.

Ratkaisu:

Tässä todistuksessa ei tarvitse molempien joukkojen, A ja B , olla avoimia. Oletetaan, että vain B on avoin.

Aluksi voidaan huomata, että Lauseen 1.14 kohdista (1) ja (8) seuraa, että jos $U \subset V$ niin $\text{int}U \subset \text{int}V$. (*)

$A \cap B = \emptyset$, joten $A \subset \mathbb{C}B$ ja $\mathbb{C}B$ on suljettu. Lauseen 1.12(3) nojalla siis $\bar{A} \subset \mathbb{C}B$. (**)

Nyt Lauseen 1.14(4) ja Lauseen 1.12(8) nojalla $\text{int}\bar{A} \cap \text{int}\bar{B} = \mathbb{C}\bar{A} \cap \mathbb{C}\bar{B} = \mathbb{C}(\bar{A} \cup \bar{B}) = \mathbb{C}(\mathbb{C}\bar{A} \cup \mathbb{C}\bar{B}) = \mathbb{C}\mathbb{C}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \text{int}(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Tämän, (*):n ja (**):n avulla saadaan $\text{int}\bar{A} \cap \text{int}\bar{B} = \text{int}(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset \text{int}(\mathbb{C}B \cap \bar{B}) \subset \text{int}\mathbb{C}B = \mathbb{C}\bar{B}$.

Toisaalta $\text{int}\bar{A} \cap \text{int}\bar{B} = \text{int}(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset \bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}$, joten $\text{int}\bar{A} \cap \text{int}\bar{B} \subset \bar{B} \cap \mathbb{C}\bar{B} = \emptyset$. $\square$

Tehtävä 1:11: Olkoot A ja B avaruuden X suljettuja osajoukkoja, joilla ei ole sisäpisteitä. Osoita, että joukolla $A \cup B$ ei ole sisäpisteitä (tämä on vaatimaton äärellinen versio Bairen lauseesta 10.9).

Ratkaisu:

Tässä käytetään tehtävää 1:13, joten katso se ensin, ja käytetään myös tehtävän 1:10 tulosta ja sen (*)-kohtaa.

$\text{int}A = \overline{\mathbb{C}A} = \emptyset = \text{int}B = \overline{\mathbb{C}B}$, mistä seuraa, että $\overline{\mathbb{C}A} = \overline{\mathbb{C}B} = X$ eli joukot $\mathbb{C}A$ ja $\mathbb{C}B$ ovat tiheitä, epättyhjiä ja avoimia. Osoitetaan, että myös joukko $\mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B$ on tiheä. Tehdään vastaoletus: on olemassa joukko $V \Subset X, V \neq \emptyset$, s.e. $V \cap \mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B = \emptyset$. Koska $\mathbb{C}A$ on tiheä niin $V \cap \mathbb{C}A \neq \emptyset$ ja lisäksi $V \cap \mathbb{C}A$ on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin. Vastaoletuksen mukaan joukot $V \cap \mathbb{C}A$ ja $\mathbb{C}B$ ovat erillisiä. Siis tehtävän 1:10 ja sen (*)-kohdan nojalla:

$\emptyset \neq V \cap \mathbb{C}A = \text{int}(V \cap \mathbb{C}A) \subset \text{int}(\overline{V \cap \mathbb{C}A}) \cap X = \text{int}(\overline{V \cap \mathbb{C}A}) \cap \text{int}\overline{\mathbb{C}B} = \emptyset$, mikä on ristiriita.

Siis kaikilla $V \Subset X, V \neq \emptyset$, pätee $V \cap \mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B \neq \emptyset$ eli $\overline{\mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B} = X$. Tästä seuraa, että $\text{int}(A \cup B) = \overline{\mathbb{C}A \cap \mathbb{C}B} = \mathbb{C}X = \emptyset$. $\square$

Tehtävä 1:12: Olkoot d ja e joukon X metriikkoja, ja olkoon $d(x, y) \leq e(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Osoita, että $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.

Ratkaisu:

$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : \forall x \in U \exists r > 0 \text{ s.e. } B_d(x, r) \subset U\}$, missä $B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Olkoon $U \in \mathcal{T}_d$, $U \neq \emptyset$, ja $x \in U$. On olemassa sellainen $r > 0$ että $B_d(x, r) \subset U$. Olkoon $z \in B_e(x, r)$. Nyt $d(z, x) \leq e(z, x) < r$, joten $z \in B_d(x, r)$. Siis $B_e(x, r) \subset B_d(x, r) \subset U$. Tämä tarkoittaa, että $U \in \mathcal{T}_e$ eli $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$. $\square$

Tehtävä 1:13: Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

- (1) A on tiheä X :ssä.
- (2) A kohtaa X :n jokaisen avoimen epätyhjän osajoukon.
- (3) $\text{int}\mathbb{C}A = \emptyset$

Ratkaisu:

$$(1) \Leftrightarrow (3): \bar{A} = X \Leftrightarrow \text{int}\mathbb{C}A = \overline{\mathbb{C}\mathbb{C}A} = \mathbb{C}\bar{A} = \emptyset.$$

$$(1) \Rightarrow (2): \text{Olkoon } B \subseteq X \text{ ja } B \neq \emptyset. \text{ Vastaoletus: } A \cap B = \emptyset.$$

Vastaoletuksesta saadaan $A \subset \mathbb{C}B$ mistä Lauseen 1.12(3) nojalla saadaan $\bar{A} = X \subset \mathbb{C}B \subset X$ eli $\mathbb{C}B = X$, joten $B = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis $A \cap B \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Jos $\mathbb{C}\bar{A} = \emptyset$ niin väite on selvä, joten oletetaan, että $\mathbb{C}\bar{A} \neq \emptyset$. Koska $\mathbb{C}\bar{A} \subseteq X$ niin (2):n nojalla:

$\emptyset \neq \mathbb{C}\bar{A} \cap A \subset \mathbb{C}\bar{A} \cap \bar{A} = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis täytyy olla $\mathbb{C}\bar{A} = \emptyset$ eli $\bar{A} = X$. $\square$

Tehtävä 1:14: Olkoon X joukko, jonka jokaista osajoukkoa $A \subset X$ kohti on annettu sellainen joukko $\bar{A} \subset X$, että kohdassa 1.16 mainitut Kuratowskin ehdot (K1)-(K4) ovat voimassa. Olkoon $\mathcal{T}$ niiden joukkojen $V \subset X$ kokoelma, joilla $\overline{\mathbb{C}V} = \mathbb{C}V$. Todista:

(a) $\mathcal{T}$ on X :n topologia.
(b) Joukko $\bar{A}$ on A :n sulkeuma topologiassa $\mathcal{T}$ kaikilla $A \subset X$.

Ratkaisu:

Todetaan aluksi, että jos $U \subset V$ niin $U \cup V = V$ ja (K3):n nojalla $\bar{U} \subset \bar{U} \cup \bar{V} = \bar{U} \cup \bar{V} = \bar{V}$. Saatiin siis tulos:

$$U \subset V \Rightarrow \bar{U} \subset \bar{V} \quad (*)$$

$$\mathcal{T} = \{V \subset X : \overline{\mathbb{C}V} = \mathbb{C}V\}$$

(a) (T1): Olkoon $V_j \in \mathcal{T}, j \in J$, missä J on jokin indeksijoukko. (K1):n ja (*):n avulla saadaan

$$\mathbb{C} \bigcup_{j \in J} V_j \subset \overline{\mathbb{C} \bigcup_{j \in J} V_j} = \overline{\bigcap_{j \in J} \mathbb{C}V_j} \subset \overline{\mathbb{C}V_k} = \mathbb{C}V_k, \text{ missä } k \in J.$$

Koska tämä pätee kaikilla $k \in J$ niin $\overline{\bigcap_{j \in J} \mathbb{C}V_j} \subset \bigcap_{j \in J} \mathbb{C}V_j = \mathbb{C} \bigcup_{j \in J} V_j$. Saatiin

$$\text{siis } \overline{\mathbb{C} \bigcup_{j \in J} V_j} = \mathbb{C} \bigcup_{j \in J} V_j \text{ eli } \bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{T}.$$

(T2'): Olkoon $U, V \in \mathcal{T}$. Nyt (K3):n nojalla:

$$\overline{\mathbb{C}(U \cap V)} = \overline{\mathbb{C}U \cup \mathbb{C}V} = \overline{\mathbb{C}U} \cup \overline{\mathbb{C}V} = \mathbb{C}U \cup \mathbb{C}V = \mathbb{C}(U \cap V) \text{ eli } U \cap V \in \mathcal{T}.$$

(T3): (K1):n nojalla $X \subset \bar{X} \subset X$ eli $\bar{X} = X$. Siis $\overline{\mathbb{C}\emptyset} = \bar{X} = X = \mathbb{C}\emptyset$ eli $\emptyset \in \mathcal{T}$. (K4):n nojalla $\overline{\mathbb{C}X} = \bar{\emptyset} = \emptyset = \mathbb{C}X$ eli $X \in \mathcal{T}$.

$\therefore \mathcal{T}$ on X :n topologia.

(b) Merkitään nyt A :n sulkeumaa topologiassa $\mathcal{T}$ merkinnällä $\text{cl}A$ ja osoitetaan, että $\bar{A} = \text{cl}A$. Ensinnäkin (K2):n nojalla $\overline{\mathbb{C}\bar{A}} = \bar{\bar{A}} = \bar{A} = \mathbb{C}\bar{A}$, joten $\mathbb{C}\bar{A} \in \mathcal{T}$ eli $\bar{A}$ on $\mathcal{T}$ -suljettu. Siis $\bar{A} = \text{cl}\bar{A}$. (K1):n nojalla $A \subset \bar{A}$, joten Lauseen 1.12(5) nojalla $\text{cl}A \subset \text{cl}\bar{A} = \bar{A}$. Toisinpäin sisältyvyys saadaan Lauseen 1.12(1):n ja (*):n avulla, koska $\mathbb{C}\text{cl}A \in \mathcal{T}$:

$$A \subset \text{cl}A \text{ eli } (*) \text{ :n avulla } \bar{A} \subset \overline{\text{cl}A} = \overline{\mathbb{C}\text{cl}A} = \mathbb{C}\text{cl}A = \text{cl}A.$$

$\therefore \bar{A} = \text{cl}A$. $\square$

Tehtävä 1:15: Olkoon $A_1, A_2, \dots$ jono avaruuden X osajoukkoja. Jonon (topologinen) $\limsup$ on niiden pisteiden $x \in X$ joukko, joiden jokainen ympäristö kohtaa A_j :n äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Jonon $\liminf$ on niiden pisteiden $x \in X$ joukko, joiden jokainen ympäristö kohtaa A_j :t lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä j , ts. jostakin indeksistä $j = j_0$ alkaen.

- (a) Osoita, että nämä joukot ovat suljettuja.
- (b) Osoita, että ne eivät muutu, jos joukot A_j korvataan sulkeumillaan.
- (c) Anna esimerkki tapauksesta, jossa

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j = \emptyset \neq \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

Ratkaisu:

- (a) Lauseen 1.12(1) takia tarvitsee osoittaa vain sisältyvyys $\overline{\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j} \subset \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$, mistä väite heti seuraa.

Olkoon $x \in \overline{\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j}$ ja olkoon U jokin x :n ympäristö. Nyt $U \cap \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j \neq \emptyset$. Olkoon $y \in U \cap \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$, jolloin U on myös y :n ympäristö ja lisäksi $y \in \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$. Siis $U \cap A_j \neq \emptyset$ äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Siis $x \in \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$. Tästä seuraa, että $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$ on suljettu.

Sen todistamiseksi, että $\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j$ on myös suljettu korvataan edellisestä tekstistä $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j \mapsto \liminf_{j \rightarrow \infty} A_j$ ja "äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$ " $\mapsto$ "jostakin indeksistä $j = j_0$ alkaen".

- (b) Täytyy osoittaa, että $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} \bar{A}_j$ ja $\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} \bar{A}_j$.

Tarkastellaan ensin $\limsup$ ia. Olkoon $x \in \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$ ja U jokin x :n ympäristö. Nyt $\emptyset \neq U \cap A_j \subset U \cap \bar{A}_j$ äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Siis $x \in \limsup_{j \rightarrow \infty} \bar{A}_j$. Jotta saadaan toisinpäin sisältyvyys, olkoon nyt

$x \in \limsup_{j \rightarrow \infty} \bar{A}_j$ ja U jokin x :n ympäristö. Tällöin $U \cap \bar{A}_j \neq \emptyset$ äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$. Olkoon tämä ääretön indeksijoukko $J \subset \mathbb{N}$. Kaikilla $j \in J$ valitaan $y(j) \in U \cap \bar{A}_j$, jolloin U on $y(j)$:den ympäristö kaikilla $j \in J$. Koska $y(j) \in \bar{A}_j$ niin $U \cap A_j \neq \emptyset$ kaikilla $j \in J$. Toisin

sanoen $U \cap A_j \neq \emptyset$ on tosi äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$, joten $x \in \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$.

Taas tapaus $\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j = \liminf_{j \rightarrow \infty} \bar{A}_j$ todistetaan samoin korvaamalla edellisessä tekstissä $\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j \mapsto \liminf_{j \rightarrow \infty} A_j$ ja "äärettömän monella indeksillä $j \in \mathbb{N}$ " $\mapsto$ "jostakin indeksistä $j = j_0$ alkaen".

(c) Olkoon $X = \mathbb{N}$, topologia diskreetti $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$ ja joukkojono $(A_1, A_2, \dots) = (\{1\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \dots)$, missä siis $A_{2n-1} = \{1\}$ ja $A_{2n} = \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos $x \in X$ niin $\{x\} \subset X$ on x :n ympäristö ja $\{x\} \cap A_{2n} = \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis oli $j_0 \in \mathbb{N}$ mikä hyvänsä, niin koskaan ei päde että $\{x\} \cap A_j \neq \emptyset$ aina kun $j \geq j_0$ eli jostakin indeksistä $j = j_0$ alkaen. Siis $\liminf_{j \rightarrow \infty} A_j = \emptyset$.

Toisaalta valitsemalla $J = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ saadaan ääretön indeksijoukko, ja jokaiselle 1 :n ympäristölle U pätee $1 \in U \cap A_j$ eli $U \cap A_j \neq \emptyset$ äärettömän monella indeksillä $j \in J$. Siis $1 \in \limsup_{j \rightarrow \infty} A_j$ eli

$\limsup_{j \rightarrow \infty} A_j \neq \emptyset$. $\square$