

Topologia

Tehtävät 2:1-2:6

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 2:1: Osoita, että väli $[a, b[$ on avoin ja suljettu topologisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$. Määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma ja reuna.

Ratkaisu:

$\{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ on $\mathcal{T}_{\text{pa}}$:n kanta.

Kannan määritelmän 2.1(1) nojalla $[a, b[$ on avoin, kun $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Nyt $\mathcal{C}[a, b[=] - \infty, a[\cup [b, \infty[= \left(\bigcup_{n > |a|, n \in \mathbb{N}} [-n, a[\right) \cup \left(\bigcup_{n > |b|, n \in \mathbb{N}} [b, n[\right)$. Koska

$[-n, a[$ ja $[b, n[$ ovat $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ -avoimia, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n > \max\{|a|, |b|\}$, niin topologian määritelmän (T1) nojalla myös näiden yhdisteet ovat avoimia. Avoimien joukkojen yhdisteiden yhdiste on myös avoin. Siis $\mathcal{C}[a, b[$ on avoin eli $[a, b[$ on suljettu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$:ssa.

Koska $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$ niin $]0, 1[$ on $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ -avoin. Edellisen osoituksen nojalla $[0, 1[$ on $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ -suljettu. Huomaamalla, että $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ näemme lisäksi, että

$\{0\}$ on suljettujen joukkojen (numeroituvasti) äärettömänä leikkauksena suljettu. Siis $\overline{\{0\}} = \{0\}$.

Olkoon $U \in \mathcal{T}_{\text{pa}}$ luvun 0 jokin ympäristö. Lauseen 2.4 nojalla U sisältää kanta-alkion $\Delta = [a, b[$, missä $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, siten että $0 \in \Delta$. Nyt $\Delta \cap]0, 1[\neq \emptyset$, joten $U \cap]0, 1[\neq \emptyset$ ja siis $0 \in \overline{]0, 1[}$. Lauseen 1.12(8) avulla saadaan:

$[0, 1[= \overline{]0, 1[} = \overline{\{0\} \cup]0, 1[} = \overline{\{0\}} \cup \overline{]0, 1[} = \{0\} \cup \overline{]0, 1[} = \overline{]0, 1[}$ eli $\overline{]0, 1[} = [0, 1[$

Lauseen 1.14(5) avulla saadaan $\partial]0, 1[= \overline{]0, 1[} \setminus \text{int }]0, 1[= \overline{]0, 1[} \setminus]0, 1[= \{0\}$.

□

Tehtävä 2:2: Tutki seuraavista kokoelmista $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, mitkä niistä ovat $\mathbb{R}$:n jonkin topologian kantoja:

- (a) $\mathcal{B} = \{]x-1, x+1[: x \in \mathbb{R}\}$,
- (b) $\mathcal{B} = \{[-1/n, 1/n] : n \in \mathbb{N}\}$,
- (c) $\mathcal{B} = \{]a, b[\cup]c, \infty[: a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c\}$.

Myönteisessä tapauksessa vertaa saatua topologiaa $\mathbb{R}$:n tavalliseen topologiaan ja määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma.

Ratkaisu:

(a) Selvästi (K2) ei toteudu, sillä esim. $] - 1, 1[,] - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\in \mathcal{B}$, mutta $] - 1, 1[\cap] - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}[=] - \frac{1}{2}, 1[$ ja jos valitaan $x = 0$ niin esim. $] - 1, 1[\not\subset] - \frac{1}{2}, 1[$. Kuvainnollisesti voisi sanoa, että aina $|(x+1) - (x-1)| = 2$, joten välin $]x-1, x+1[$ pituus on 2 eikä se mahdu pituudeltaan 2:ta pienempiin väleihin, kuten väliin $] - \frac{1}{2}, 1[$, jonka pituus on vain $\frac{3}{2}$.

(b) Selvästi (K1) ei toteudu, sillä $\bigcup \mathcal{B} = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$.

(c) Kun $c \rightarrow -\infty$ niin huomataan, että $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$ eli (K1) toteutuu. Jaetaan (K2) neljään tapaukseen.

Kun $B_1 =]a_1, b_1[\cup]c_1, \infty[$ ja $B_2 =]a_2, b_2[\cup]c_2, \infty[$ niin
 $B_1 \cap B_2 =]\max\{c_1, c_2\}, \infty[$ tai
 $B_1 \cap B_2 =]\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}[\cup]\max\{c_1, c_2\}, \infty[$ tai
 $B_1 \cap B_2 =]a_1, b_1[\cup]c_1, \infty[$ tai
 $B_1 \cap B_2 =]a_2, b_2[\cup]c_2, \infty[$.

Näistä neljästä leikkauksesta kolme viimeistä selvästi kuuluvat $\mathcal{B}$:hen.

Tapauksessa $B_1 \cap B_2 =]\max\{c_1, c_2\}, \infty[$ niin jos $x \in B_1 \cap B_2$ voidaan valita $c > b > x > a > \max\{c_1, c_2\}$ s.e. $x \in B =]a, b[\cup]c, \infty[$, ja jolloin $B \subset B_1 \cap B_2$. Siis (K2) toteutuu ja $\mathcal{B}$ on jonkin $\mathbb{R}$:n topologian $\mathcal{T}$ kanta.

$]a, b[\subset]a, b[\cup]c, \infty[$, joten Lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$. Koska $]c, \infty[= \bigcup_{n>c, n \in \mathbb{N}}]c, n[\in \mathcal{T}_{\text{tav}}$ niin $]a, b[\cup]c, \infty[\in \mathcal{T}_{\text{tav}}$ kaikilla

$a, b, c \in \mathbb{R}, a < b < c$. Tästä seuraa, topologian määritelmän (T1) nojalla, että $\mathcal{T}$:n kannan $\mathcal{B}$ jäsenten kaikki yhdisteet, eli $\mathcal{T}$:n jäsenet, kuuluvat $\mathcal{T}_{\text{tav}}$:iin. Siis $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{tav}}$.

Edellisen nojalla (c)-kohdassa $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{tav}}$, joten välin $]0, 1[$ sulkeuma $\mathcal{T}$:ssä on sama kuin tavallisessa topologiassa. Siis $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$. $\square$

Tehtävä 2:3: Osoita, että vaakasuorat janat

$J(a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, y = c\}$, jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$, muodostavat tason $\mathbb{R}^2$ erään topologian kannan. Mikä on kiekon B^2 sulkeuma?

Ratkaisu:

$$\mathcal{B} = \{J(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Selvästi (K1) toteutuu eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}^2$. Myös (K2') toteutuu, koska kokoelman $\mathcal{B}$ alkioiden leikkaus on joko $\emptyset$ tai (x-akselin suuntainen) jana. Siis $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n erään topologian kanta.

Kiekko $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Väitetään, että $\overline{B^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$ eli että $\overline{B^2} = (B^2 \cup S^1) \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$. Kuvainnollisesti voidaan sanoa, että kiekon sulkeuma koostuu avoimen kiekon B^2 ja ympyrän S^1 yhdisteestä poistettuna pisteet $(0, 1)$ ja $(0, -1)$. Perustelu on seuraava. Selvästi kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, pisteillä kaikkien ympäristöjen x-akselin suuntainen osajoukkojana, johon tarkasteltava piste kuuluu, koskettaa B^2 :ta. Siis näiden pisteiden ympäristöt koskettavat B^2 :ta eli nämä pisteet kuuluvat sulkeumaan. Pisteet $(0, 1)$ ja $(0, -1)$ jäävät pois, koska janoille $J(a, b, 1)$ ja $J(a, b, -1)$ pätee $J(a, b, 1) \cap B^2 = \emptyset = J(a, b, -1) \cap B^2$. Pisteillä $(0, 1)$ ja $(0, -1)$ on siis ympäristöt, jotka eivät koske B^2 :ta, joten ne eivät kuulu B^2 :n sulkeumaan. Muille $\mathbb{R}^2$:n pisteille, siis niille joille ei päde $x^2 + y^2 \leq 1$, voidaan helposti antaa x-akselin suuntainen jana, joka ei koske B^2 :ta, joten nämä muut $\mathbb{R}^2$:n pisteet eivät myöskään kuulu sulkeumaan. $\square$

Tehtävä 2:4: Osoita, että kokoelma $\mathcal{B} = \{[a, b] : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, a < b\}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kanta. Todista:

- (a) $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$,
- (b) $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$,
- (c) $\mathcal{T}_{\text{pa}} \not\subset \mathcal{T}$.

Ratkaisu:

Selvästi (K1) toteutuu eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$. Myös (K2') toteutuu, koska kokoelman $\mathcal{B}$ alkioden leikkaus on joko $\emptyset$ tai muotoa $[a, b]$, missä $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $a < b$. Siis $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$:n erään topologian $\mathcal{T}$ kanta.

(a) Olkoon $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$, missä $\mathcal{B}_1$ on $\mathcal{T}_{\text{tav}}$:n kanta. Siis $B_1 =]a, b[$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Valitaan väliltä $]a, x[$ rationaaliluku $c \in \mathbb{Q}$ ja väliltä $]x, b[$ irrationaaliluku $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällöin $x \in [c, d] = B_2 \subset B_1$ ja $B_2 \in \mathcal{B}$, joten Lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{tav}} \subset \mathcal{T}$.

(b) Olkoon $\mathcal{B}_2 = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ eli $\mathcal{B}_2$ on siis $\mathcal{T}_{\text{pa}}$:n kanta. Valitaan Lauseessa 2.12 $x = \pi$ ja $B_1 = [1, \pi]$. Selvästikin on mahdotonta, että olisi olemassa puoliavoin väli $[a, b[\in \mathcal{B}_2$ s.e. $\pi \in [a, b[\subset [1, \pi]$. Siis Lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T} \not\subset \mathcal{T}_{\text{pa}}$.

(c) Olkoon taas $\mathcal{B}_2$ kuten (b)-kohdassa, $x = \pi$ ja nyt $B_1 = [\pi, 4[\in \mathcal{B}_2$. Selvästikään ei ole olemassa sellaista väliä $[a, b] \in \mathcal{B}$, että $\pi \in [a, b] \subset [\pi, 4[$, mutta kuitenkin $a \in \mathbb{Q}$. Siis Lauseen 2.12 nojalla $\mathcal{T}_{\text{pa}} \not\subset \mathcal{T}$. $\square$

Tehtävä 2:5: Olkoon $U(a, t) = \{a\} \cup [t, \infty[$, kun $a, t \in \mathbb{R}$. Osoita, että joukot $U(a, t)$ muodostavat joukon $\mathbb{R}$ erään topologian $\mathcal{T}$ kannan. Todista saadusta avaruudesta $(X, \mathcal{T})$:

- (a) X ei ole Hausdorff.
- (b) X ei ole diskreetti.
- (c) Jos $A \subset X$ on ylhäältä rajoitettu, niin A on diskreetti.
- (d) Määritä joukkojen $]0, 1[$ ja $\mathbb{N}$ sulkeumat.

Ratkaisu:

$$\mathcal{B} = \{U(a, t) : a, t \in \mathbb{R}\}.$$

Selvästi (K1) toteutuu, kun $t \rightarrow -\infty$, eli $\bigcup \mathcal{B} = \mathbb{R}$. (K2):n toteutumisesta saadaan kuusi tapausta.

Jos $a = b$ niin $U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = U(a, \max\{t_1, t_2\})$ tai

$U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = U(a, t_1)$ tai

$U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = U(a, t_2)$.

Jos $a \neq b$ niin $U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = [\max\{t_1, t_2\}, \infty[$ tai

$U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = U(a, t_1)$ tai

$U(a, t_1) \cap U(b, t_2) = U(b, t_2)$.

Näistä kuudesta tapauksesta viisi kuuluu selvästi kokoelmaan $\mathcal{B}$, joten tutkitaan jäljelle jäävä tapaus (neljäs).

Kun $x \in [\max\{t_1, t_2\}, \infty[$ voidaan valita $U(x, \max\{t_1, t_2\} + |x|)$, jolle pätee $x \in U(x, \max\{t_1, t_2\} + |x|) \subset [\max\{t_1, t_2\}, \infty[$. Siis (K2) toteutuu myös tässä tapauksessa eli $\mathcal{B}$ on topologian $\mathcal{T}$ kanta.

(a) Olkoon $a, b \in X, a \neq b$, ja olkoon U a :n ympäristö ja V b :n ympäristö.

Lauseen 2.4(2) nojalla on olemassa kanta-alkio $U(a', t_1) \in \mathcal{B}$ s.e.

$a \in U(a', t_1) \subset U$ ja samoin $U(b', t_2) \in \mathcal{B}$ s.e. $b \in U(b', t_2) \subset V$. Koska

edellisten tarkastelujen myötä $\emptyset \neq U(a', t_1) \cap U(b', t_2) \subset U \cap V$ niin

$U \cap V \neq \emptyset$ eli X ei ole Hausdorff.

(b) Diskreetti avaruus on aina Hausdorff, joten (a)-kohdan nojalla X ei ole diskreetti.

(c) Olkoon $A \subset X$, A ylhäältä rajoitettu ja $x \in A$. Täytyy osoittaa, että x on erakkopiste. Olkoon $\sup A$ A :n pienin yläraja. Nyt

$U(x, \sup A + 1) = \{x\} \cup [\sup A + 1, \infty[\subset X$ on avoin x :n ympäristö. Koska $x \leq \sup A$, ja tietysti $\sup A < \sup A + 1$, niin $U(x, \sup A + 1) \cap A = \{x\}$.

Siis x on erakkopiste ja A siis diskreetti.

(d) $]0, 1[$ on ylhäältä rajoitettu ($\sup]0, 1[= 1$), joten (c)-kohdan nojalla se on diskreetti. Siis kaikki $]0, 1[$:n pisteet ovat erakkopisteitä. 0 ja 1 eivät ole

kasautumispisteitä, koska $0 \in \{0\} \cup [1, \infty[$ ja $1 \in \{1\} \cup [2, \infty[$ ja nämä ympäristöt eivät leikkaa $]0, 1[:$ tä. Muut pisteet $x < 0$ tai $x > 1$ eivät selvästikään voi myöskään olla kasautumispisteitä, koska niilläkin (kuten 0:lla ja 1:llä) on ympäristöt, jotka eivät leikkaa $]0, 1[:$ tä. Siis $\overline{]0, 1[} =]0, 1[$.

Muistin virkistykseksi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kaikki reaaliluvut $\mathbb{R}$ ovat $\mathbb{N}$:n kasautumispisteitä, koska jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \in U(a, t)$, missä $a, t \in \mathbb{R}$, niin $\#(U(a, t) \cap \mathbb{N}) = \infty$ eli $(U(a, t) \cap \mathbb{N}) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Siis $\overline{\mathbb{N}} = X = \mathbb{R}$. $\square$

Tehtävä 2:6: Osoita, että jos $\#X \leq 1$, niin X :n ainoalla topologialla on täsmälleen kaksi kantaa.

Ratkaisu:

Jos $\#X = 0$ niin sen ainoa topologia on $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset\}$. Kannan $\mathcal{B}_0$ määritelmä 2.1(1) asettaa vaatimuksen $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{T}_0 = \{\emptyset\}$. Ainoa kokoelma, joka tämän toteuttaa on $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset\}$. Toinen mahdollinen kanta tässä tapauksessa jäi löytymättä.

Jos $\#X = 1$ niin ainoa topologia on $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\text{mini}} = \mathcal{T}_{\text{dis}} = \{\emptyset, X\}$. Topologia on aina oma kantansa, joten kantoja on nyt kaksi: $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X\}$ ja $\mathcal{B}_2 = \{X\}$. $\square$