

Topologia

Tehtävät 3:1-3:8

(Tehtävänannot [mahdollisin pienin muutoksin] kirjasta Topologia II, Jussi Väisälä, 2015 painos. Ratkaisut: Waves and Tensors)

Tehtävä 3:1: Olkoon X avaruus. Funktio $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on *alaspäin puolijatkuva*, jos jokaista $a \in X$ ja jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen a :n ympäristö U , että $f(x) > f(a) - \epsilon$ kaikilla $x \in U$. Osoita, että f on alaspäin puolijatkuva tarkalleen silloin, kun f on jatkuva kohdassa 1.2.8 esitetyn $\mathbb{R}$:n topologian suhteen. Anna esimerkki alaspäin puolijatkuvasta funktiosta, joka ei ole jatkuva.

Ratkaisu:

$$\mathcal{T} = \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{T}$ on $\mathbb{R}$:n eräs topologia (tehtävä 1:4).

Olkoon f alaspäin puolijatkuva. Olkoon $a \in X$ ja V $f(a)$:n ympäristö. Oletetaan lisäksi, että $V \neq \emptyset$ ja $V \neq \mathbb{R}$. Siis on olemassa $b \in \mathbb{R}$ s.e. $V =]b, \infty[$. Olkoon $\epsilon = f(a) - b > 0$. Koska f on alaspäin puolijatkuva niin on olemassa a :n ympäristö U siten että $f(x) > f(a) - \epsilon = b$ kaikilla $x \in U$. Siis $fU \subset V$ eli f on jatkuva.

Olkoon f jatkuva ja olkoon $a \in X$ ja $\epsilon > 0$. Nyt $f(a) \in]f(a) - \epsilon, \infty[\in \mathcal{T}$, joten $]f(a) - \epsilon, \infty[$ on $f(a)$:n ympäristö. f :n jatkuvuuden nojalla on olemassa a :n ympäristö U s.e. $fU \subset]f(a) - \epsilon, \infty[$. Siis $f(x) > f(a) - \epsilon$ kaikilla $x \in U$ eli f on alaspäin puolijatkuva.

$\therefore f : X \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ on alaspäin puolijatkuva tarkalleen silloin kun f on jatkuva.

$$\text{Olkoon } f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}}), f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases},$$

missä $\mathcal{T}_{\text{tav}}$ on $\mathbb{R}$:n tavallinen topologia.

Selvästi f ei ole jatkuva 0:ssa eli f ei ole jatkuva. Olkoon $\epsilon > 0$. f on alaspäin puolijatkuva pisteissä $a \leq 0$, sillä näissä pisteissä $f(a) = 0$ ja $f(x) > 0 - \epsilon = f(a) - \epsilon = -\epsilon$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. f on alaspäin puolijatkuva myös pisteissä $a > 0$ sillä tällöin $f(a) = 1$ ja $f(x) > 1 - \epsilon = f(a) - \epsilon$ kaikilla $x \in]0, \infty[\in \mathcal{T}_{\text{tav}}$. Siis f on alaspäin puolijatkuva. $\square$

Tehtävä 3:2: Olkoon X avaruus, $A \subset X$ ja $f = \chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ joukon A karakteristinen funktio, ts. $f(x) = 1$, kun $x \in A$, ja $f(x) = 0$, kun $x \notin A$. Osoita, että

$$\partial A = \{x \in X : f \text{ on epäjatkuva pisteessä } x\}.$$

Ratkaisu:

$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ eli yksiö on suljettu $\mathbb{R}$:ssä.

Olkoon $a \in \text{int}A \subset A$. Tällöin $f(a) = 1$ ja tiedetään, että $fA = \{1\}$. Olkoon V jokin $f(a)$:n eli 1:n ympäristö. Saadaan:

$$f(\text{int}A) \subset fA = \{1\} \subset V.$$

Siis jokaista $f(a) = 1$:n ympäristöä V kohti on olemassa a :n ympäristö $\text{int}A$ s.e. $f(\text{int}A) \subset V$. Siis f on jatkuva pisteissä $a \in \text{int}A$.

Tapaus $a \in \text{ext}A \subset \mathbb{C}A$, jolloin $f(a) = 0$ menee seuraavasti. Tiedetään, että $f\mathbb{C}A = \{0\}$. Olkoon W jokin $f(a)$:n eli 0:n ympäristö. Saadaan:

$$f(\text{ext}A) \subset f\mathbb{C}A = \{0\} \subset W.$$

Siis jokaista $f(a) = 0$:n ympäristöä W kohti on olemassa a :n ympäristö $\text{ext}A$ s.e. $f(\text{ext}A) \subset W$. Siis f on jatkuva pisteissä $a \in \text{ext}A$.

$\therefore f$ on jatkuva $\text{int}A \cup \text{ext}A$:ssa.

Olkoon nyt $a \in \partial A$ ja tehdään vastaoletus: f on jatkuva a :ssa. Koska $X = A \cup \mathbb{C}A$ niin $f(a) = 0$ tai $f(a) = 1$.

Tapaus $f(a) = 0$: Olkoon V jokin 0:n ympäristö, jolloin myös $V \setminus \{1\}$ on 0:n ympäristö. Koska f on jatkuva a :ssa niin on olemassa a :n ympäristö U s.e. $fU \subset V \setminus \{1\}$. Kuitenkin koska $a \in \partial A$ niin $U \cap A \neq \emptyset$ (ja $U \cap \mathbb{C}A \neq \emptyset$). Siis:

$$f(U \cap A) = \{1\} \subset fU \subset V \setminus \{1\} \text{ eli } 1 \in V \setminus \{1\}, \text{ mikä on ristiriita.}$$

Tapaus $f(a) = 1$ palautuu edelliseen tapaukseen, kun korvataan $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ ja $A \mapsto \mathbb{C}A$.

Koska $X = \text{int}A \cup \text{ext}A \cup \partial A$ ja f on jatkuva pisteissä $\text{int}A \cup \text{ext}A$ saadaan $\partial A = \{x \in X : f \text{ on epäjatkuva pisteessä } x\}$. $\square$

Tehtävä 3:3: Olkoon X sellainen avaruus, että jokainen kuvaus $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Osoita, että X on diskreetti.

Ratkaisu:

Edellisessä tehtävässä 3:2 osoitettiin, että yhden pisteen joukko $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{tav}})$:ssa on suljettu.

Olkoon $x \in X$ ja $f(y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } y = x \\ 0, & \text{kun } y \in X \setminus \{x\} \end{cases}$.

f :n jatkuvuudesta seuraa Lauseen 3.3(3) nojalla että $f^{-1}\{0\} = X \setminus \{x\}$ on suljettu, mistä seuraa että $\mathcal{C}(X \setminus \{x\}) = \{x\}$ on avoin.

$\therefore$ Kaikki joukot X :ssä ovat avoimia eli X on diskreetti. $\square$

Tehtävä 3:4: Osoita, että väli $[0, 1]$ voidaan jatkuvasti kuvata kahden pisteen avaruudelle $Y = \{0, 1\}$, jonka avoimet joukot ovat $\emptyset$, $\{0\}$ ja Y .

Ratkaisu:

Varustetaan väli $[0, 1]$ järjestystopologialla, jolloin se on avaruus.

$$f : [0, 1] \rightarrow Y, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in]0, 1] \\ 1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}.$$

$f^{-1}\emptyset = \emptyset$, $f^{-1}\{0\} =]0, 1]$ ja $f^{-1}Y = [0, 1]$. Nämä kaikki ovat avoimia, joten Lauseen 3.3(2) nojalla f on jatkuva. $\square$

Tehtävä 3:5: Yhtälö $f(x) = -x$ määrittelee kuvauksen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tutki, onko f jatkuva, kun sekä lähdössä että maalissa on topologia $\mathcal{T}_{\text{pa}}$.

Ratkaisu:

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}}), f(x) = -x$$

$$f^{-1}[-a, \infty[=] - \infty, a] \text{ kaikilla } a \in \mathbb{R}.$$

Jos $] - \infty, a]$ olisi avoin niin yhden pisteen joukko $\{a\} =] - \infty, a] \cap [a, \infty[$ olisi avoin eli $\mathcal{T}_{\text{pa}} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$, mikä on ristiriitä.

Siis $] - \infty, a]$ ei ole avoin eli f ei ole jatkuva. $\square$

Tehtävä 3:6: Osoita, että projektio $pr_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on avoin, mutta ei suljettu kuvaus.

Ratkaisu:

$$pr_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, pr_1(x, y) = x$$

$\mathcal{B} = \{]a, b[\times]c, d[: a, b, c, d \in]0, \infty[, a < b, c < d\}$ on $\mathcal{T}_{\text{tav}}$:n eräs kanta.

$pr_1(]a, b[\times]c, d[) =]a, b[$, joka on avoin $\mathbb{R}$:ssä, joten Lauseen 3.10 nojalla pr_1 on avoin kuvaus.

Merkitään $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy - 1$.
Selvästi f on jatkuva. Nyt $\{0\} \subset \mathbb{R}$, joten f :n jatkuvuuden ja Lauseen 3.3(3) nojalla $A = f^{-1}\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eli A on suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa.

Kuitenkin $pr_1 A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mikä ei ole suljettu $\mathbb{R}$:ssä. Siis pr_1 ei ole suljettu kuvaus. $\square$

Tehtävä 3:7: Osoita funktion $f(x) = x \sin x$ avulla, ettei Lauseen 3.10 vastine esikannoille ole tosi.

Ratkaisu:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Tarkastellaan väliä $x \in]0, \pi[$. Tällöin $x = -\tan x$ vain kohdassa $x_0 \approx 2$. Siis $f]0, \pi[=]0, x_0 \sin x_0]$ eli f ei ole avoin kuvaus. Kuitenkin $f]-\infty, a[= f]a, \infty[= \mathbb{R}$ ovat avoimia $\mathbb{R}$:ssä, joten Lauseen 3.10 vastine esikannoille ei ole tosi. $\square$

Tehtävä 3:8: Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sellainen jatkuva kuvaus, että $|f(x)| \rightarrow \infty$, kun $|x| \rightarrow \infty$. Osoita, että f on suljettu kuvaus. Osoita tämän avulla, että jokainen polynomi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on suljettu. *Vihje.* ratkaisussa tarvitaan osan I tietoja kompaktiudesta.

Ratkaisu:

Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $y \in \overline{fU}$. Pyritään osoittamaan, että $y \in fU$, mistä heti seuraa, että $fU = \overline{fU}$ eli että fU on suljettu ja siis f suljettu kuvaus.

Valitaan jono $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siten että $y_n \in fU \cap B^p(y, \frac{1}{n})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin $y_n \rightarrow y$. Valitaan sitten jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.e. $y_n = f(x_n)$, missä siis $x_n \in U$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Joukko $fU \cap B^p(y, \frac{1}{n})$ on tietenkin epätyhjä sulkeuman määritelmän nojalla ja rajoitettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $fU \cap B^p(y, \frac{1}{n}) \subset B^p(y, 1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos $|x_n| \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$, niin $|f(x_n)| \rightarrow \infty$, mikä on mahdotonta, koska $f(x_n) \in B^p(y, 1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis joukko $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu.

On siis olemassa $r > 0$ s.e. $A \subset B^n(0, r) \subset \overline{B^n(0, r)} \subset B^n(0, r+1)$, joten $\bar{A} \subset \overline{B^n(0, r)} \subset B^n(0, r+1)$ eli $\bar{A}$ on myös rajoitettu. $\bar{A}$ on tietysti myös suljettu, joten se on kompakti. Koska U on suljettu, niin $\bar{A} \subset U$. Lauseen I.13.18 nojalla $f\bar{A}$ on kompakti eli suljettu. Nyt $fA \subset f\bar{A}$ eli $\overline{fA} \subset f\bar{A} \subset fU$. Siis $\overline{fA} \subset fU$.

Koska $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ on fA :n jono, jolle $f(x_n) \rightarrow y$ niin Lauseen I.11.6 nojalla $y \in \overline{fA}$ eli $y \in fU$ eli f on suljettu kuvaus.

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, missä $n \in \mathbb{N}$ on polynomin aste.

Tiedetään, että $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$, joten

$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |a_n| |x^n| = \infty$. Lisäksi tiedetään, että f polynomina on jatkuva $\mathbb{R}$:ssä. Siis edellisen todistuksen nojalla f on suljettu kuvaus. Siis jokainen polynomi on suljettu kuvaus. $\square$